МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
В. В. Прасолов

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10 11

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

МГУ – ШКОЛЕ

Учебники серии «МГУ – школе» позволят учащимся получить хорошее базовое образование и помогут выработать правильный взгляд на основы научного знания. Это важно. Большинство школьных предметов – фундамент Здания Науки. Лучше сразу понять, как он устроен, чтобы потом, при изучении верхних этажей, не возвращаться к исследованию фундамента.

Учебники серии «МГУ – школе» пишут опытные школьные учителя вместе с профессорами и преподавателями Московского университета.

Надеюсь, что учёба по этим книгам принесёт школьникам как пользу, так и удовольствие.

Ректор
Московского
университета
академик

В. Садовничий

МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
В. В. Прасолов

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10
11
классы

Базовый и углублённый уровни

Учебник

Под редакцией В. А. Садовничего

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

8-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022

УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
Б93

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 479 от 14.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 168 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 162-ОЭ от 22.12.2016 г.) экспертиз

Издание выходит в pdf-формате.

Бутузов, Валентин Фёдорович.

Б93 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия : 10—11-е классы : базовый и углублённый уровни : учебник : издание в pdf-формате / В. Ф. Бутузов, В. В. Прасолов ; под ред. В. А. Садовничего. — 8-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 271, [1] с. : ил. — (МГУ — школе).

ISBN 978-5-09-101566-9 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-091740-7 (печ. изд.).

Наглядность при изложении материала и строгая логика, подкреплённые красочными иллюстрациями, помогают учащимся лучше понять изучаемый материал. Учебник содержит большой задачный материал к каждой главе, систематизация которого тщательно продумана, а также задачи с практическим содержанием и исследовательские задачи. Сведения из истории развития геометрии, список литературы с ссылками на интернет-ресурсы помогут сформировать интерес учащихся к геометрии.

Наряду с вопросами и темами, обязательными для базового уровня, учебник содержит дополнительный материал, необходимый для углублённого уровня.

УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-101566-9 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-091740-7 (печ. изд.)

Введение

Дорогие десятиклассники!

Вы приступаете к изучению той части геометрии, которая называется стереометрией. В ней рассматриваются свойства фигур, расположенных в пространстве. Само слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — твёрдый, пространственный и «метрео» — измеряю. Представление о пространственных геометрических фигурах дают окружающие нас предметы. Рассматривая их и принимая во внимание только форму предметов, мы приходим к таким геометрическим понятиям, как параллелепипед, пирамида, призма, цилиндр, конус, шар (рис. 1) и т. д. Эти и любые другие геометрические фигуры являются воображаемыми (абстрактными) объектами в отличие от реальных предметов, имеющих форму той или иной геометрической фигуры. Так, например, говоря, что футбольный мяч имеет форму шара, мы понимаем, что мяч не является идеальным шаром в том смысле, как это понимается в геометрии. Любую геометрическую фигуру, в частности шар, мы будем рассматривать как некоторое множество точек.

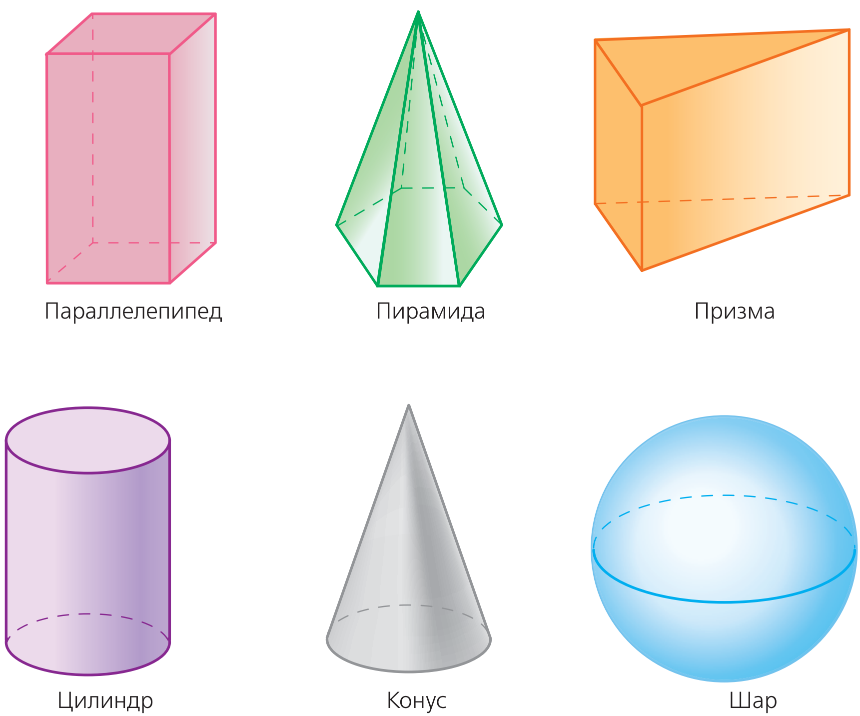


Рис. 1

В планиметрии, которую мы изучали в 7—9 классах, простейшими и, можно сказать, основными фигурами были точки и прямые. При этом все точки, все прямые и все остальные плоские фигуры находились в одной и той же плоскости. В стереометрии наряду с точками и прямыми к числу основных фигур добавляются плоскости. Представление о плоскости даёт гладкая поверхность стола, хотя это и не вся плоскость, а только её часть. Всю плоскость представляют простирающейся бесконечно во все стороны. В отличие от планиметрии, где была только одна плоскость, в стереометрии мы будем иметь дело со многими плоскостями, расположенными в пространстве.

Мы рассмотрим различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей, уделив особое внимание случаям перпендикулярности и параллельности (глава 1), затем будем изучать многогранники, к числу которых относятся параллелепипеды и пирамиды (глава 2), потом тела и поверхности вращения (цилиндр, конус, сфера, шар; см. рис. 1) и в последней (четвёртой) главе познакомимся с координатно-векторным аппаратом геометрии и его применениями. Материал, отмеченный одной звёздочкой, предназначен для углублённого уровня. Он не обязателен для базового уровня.

В конце учебника содержатся три приложения: в первом описана система аксиом, принятая в нашем курсе стереометрии, во втором приводятся исторические сведения о развитии геометрии, а в третьем даны основные формулы из курса планиметрии. Ориентироваться в большом и разнообразном материале учебника вам поможет предметный указатель.

Каждая глава учебника разделена на параграфы, а параграфы — на пункты. К каждому параграфу даны задачи, объединённые в парные задания (с нечётным и чётным номерами), относящиеся к определённому пункту параграфа. Эти задачи являются основными. В конце каждой главы приведены дополнительные задачи, которые немного труднее основных. Задачи повышенной трудности, исследовательские задачи, а также материал, отмеченный двумя звёздочками, темы рефератов и докладов, список дополнительной литературы и интернет-ресурсов предназначены тем, кому нравится заниматься геометрией, решать сложные задачи и узнавать новое, выходящее за рамки школьной программы. В конце учебника к задачам даны ответы и указания.

Изучение стереометрии полезно во многих отношениях, и прежде всего потому, что она развивает и формирует пространственные представления, а это важно для многих видов человеческой деятельности. В курсе стереометрии вы познакомитесь со многими интересными геометрическими утверждениями и формулами, с красивыми стереометрическими фигурами. Стереометрия играет фундаментальную роль в таких областях науки и техники, как архитектура, строительное дело, машиностроение, конструкторская деятельность и многие другие.

Авторы

Глава 1

Прямые и плоскости в пространстве

В начале первой главы мы сформулируем аксиомы, содержащие основные (наглядно очевидные) утверждения о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, а затем, опираясь на эти аксиомы, рассмотрим различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей. Особое внимание будет уделено перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей и параллельности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Многочисленные примеры, иллюстрирующие эти случаи взаимного расположения прямых и плоскостей, мы видим в окружающей нас обстановке: колонны зданий перпендикулярны к плоскости земли, а троллейбусные провода параллельны этой плоскости, плоскость стены комнаты перпендикулярна к плоскости пола, а плоскости пола и потолка параллельны и т. д.

Понятия перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей играют важную роль не только в геометрии, но и в строительном деле, архитектуре, конструировании и многих других сферах человеческой деятельности.

§ 1

Перпендикулярность прямой и плоскости, двух плоскостей

1

1 Аксиомы и первые теоремы стереометрии

Как уже отмечалось во введении, основными фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости. Свойства этих фигур, связанные с их взаимным расположением, выражены в четырёх аксиомах стереометрии, которые мы сформулируем в данном пункте.

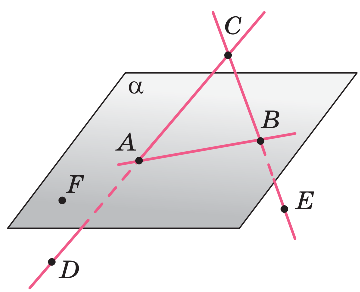
Для каждой плоскости мы будем считать, что расположенные в ней плоские фигуры (точки, прямые, углы, треугольники, многоугольники, окружности и т. д.) обладают всеми теми свойствами, которые нам известны из курса планиметрии. Иначе говоря, мы будем исходить из того, что в каждой плоскости выполняются аксиомы планиметрии. Поэтому в качестве одной из аксиом мы принимаем следующее утверждение:

АКСИОМА 1

В пространстве существуют плоскости, и в каждой плоскости справедливы аксиомы планиметрии.

Из аксиомы 1 следует, в частности, что в каждой плоскости лежат какие-то точки и какие-то прямые. Кроме того, говоря, что в пространстве существуют плоскости, мы имеем в виду, что их число не менее двух, т. е. всё пространство не сводится к одной плоскости.

Плоскости часто обозначают греческими буквами α, β, γ и т. д. На рисунке 2 изображены плоскость α (в виде параллелограмма) и точки A, B, C, D, E, F. Точки A, B и F лежат в плоскости α, а точки C, D и E не лежат в этой плоскости. Можно сказать иначе: плоскость α проходит через точки A, B и F, но не проходит через точки C, D и E. Вместо слов «точка A лежит в плоскости α» используют запись $A \in \alpha$, а вместо слов «точка C не лежит в плоскости α» — запись $C \notin \alpha$.



Плоскость α проходит через точки A, B и F. Прямая AB лежит в плоскости α

Рис. 2

Согласно аксиоме 1 в плоскости α через две[1] точки проходит прямая, и притом только одна. А можно ли утверждать, что и в пространстве через две точки проходит только одна прямая? Чтобы ответить утвердительно на этот вопрос, сформулируем ещё три аксиомы, связанные со взаимным расположением точек, прямых и плоскостей.

АКСИОМА 2

Через любые три точки проходит плоскость.

На рисунке 2 через точки A, B и F проходит плоскость α.

АКСИОМА 3

Каждая прямая лежит в некоторой плоскости.

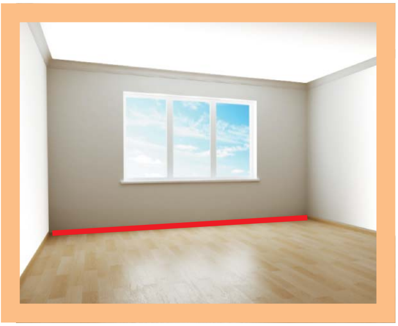
На рисунке 2 прямая AB лежит в плоскости α.

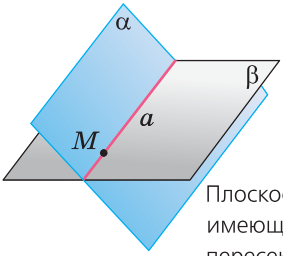
АКСИОМА 4

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что плоскости пересекаются, а их общая прямая называется линией пересечения плоскостей. На рисунке 3 плоскости α и β, имеющие общую точку M, пересекаются по прямой a.

С точки зрения наглядности аксиомы 2—4 не вызывают сомнений. Например, аксиому 4 хорошо иллюстрируют пол и стена комнаты, плоскости которых пересекаются по прямой.





Плоскости α и β, имеющие общую точку M, пересекаются по прямой a

Рис. 3

[1] Здесь и далее, говоря «две точки», «три плоскости» и т. д., мы будем считать, что эти точки, плоскости и т. д. различны.

Рассмотрим несколько теорем, которые можно доказать на основе аксиом 1—4. Первая теорема даёт утвердительный ответ на поставленный выше вопрос.

ТЕОРЕМА 1

В пространстве через две точки проходит прямая, и притом только одна.

1

✱ Доказательство. Пусть A и B — данные точки. Из аксиомы 1 следует, что существуют и другие точки. Выберем одну из них (точка C на рисунке 4, *а*). По аксиоме 2 через точки A, B и C проходит некоторая плоскость α, а согласно аксиоме 1 в плоскости α через точки A и B проходит прямая, и притом только одна. Обозначим её буквой a. Итак, через точки A и B в пространстве проходит прямая a.

Докажем теперь, что через точки A и B в пространстве проходит только одна прямая (прямая a). Для этого рассмотрим какую-нибудь прямую b, проходящую через точки A и B, и докажем, что она совпадает с прямой a.

Прямая b, проходящая через точки A и B, лежит в некоторой плоскости β (это следует из аксиомы 3). Если плоскость β совпадает с плоскостью α, то и прямая b совпадает с прямой a, поскольку в каждой плоскости согласно аксиоме 1 через две точки проходит только одна прямая.

Если же плоскости α и β, имеющие общие точки A и B, не совпадают, то по аксиоме 4 они пересекаются по некоторой прямой c, на которой лежат все их общие точки, в частности точки A и B (рис. 4, *б*). Таким образом, прямая c, проходящая через точки A и B, лежит как в плоскости α, так и в плоскости β. Но в плоскости α через точки A и B проходит прямая a (и только она одна), поэтому прямая c совпадает с прямой a. А в плоскости β через точки A и B проходит прямая b, поэтому прямая c совпадает с прямой b. Следовательно, прямые a и b совпадают, что и требовалось доказать. ✱

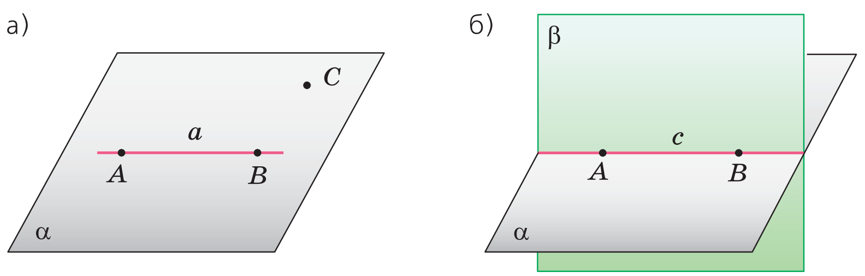


Рис. 4

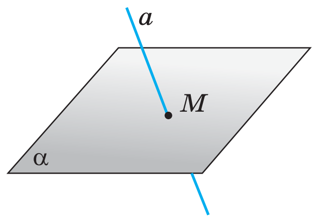
ТЕОРЕМА 2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

Доказательство. Пусть точки A и B прямой a лежат в плоскости α. Докажем, что и вся прямая a лежит в этой плоскости (см. рис. 4, *а*).

Согласно аксиоме 1 в плоскости α через точки A и B проходит прямая — обозначим её буквой b. По теореме 1 в пространстве через точки A и B проходит только одна прямая. Следовательно, прямая a совпадает с прямой b, поэтому прямая a лежит в плоскости α.

Из доказанной теоремы следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то эти прямая и плоскость имеют не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют ровно одну общую точку, то говорят, что они <u>пересекаются</u> в этой точке. На рисунке 5 прямая a и плоскость α пересекаются в точке M.



Прямая a и плоскость α пересекаются в точке M

Рис. 5

ТЕОРЕМА 3

Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

Доказательство. Рассмотрим точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. По аксиоме 2 через них проходит некоторая плоскость α. Докажем, что такая плоскость только одна.

Допустим, что через эти точки проходит также плоскость β, отличная от плоскости α. Плоскости α и β имеют общую точку A, поэтому согласно аксиоме 4 они пересекаются по прямой, на которой лежат все их общие точки, в частности точки A, B и C. Но это противоречит условию (точки A, B и C не лежат на одной прямой). Следовательно, наше предположение ошибочно, и, значит, плоскость α является единственной плоскостью, проходящей через точки A, B и C.

Плоскость, проходящую через три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, будем называть плоскостью ABC.

СЛЕДСТВИЕ 1

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.

Рассмотрим прямую AB и точку C, не лежащую на этой прямой (рис. 6, *а*), и докажем, что через эту прямую и точку проходит единственная плоскость. По теореме 3 через точки A, B и C проходит единственная плоскость — плоскость ABC. Так как точки A и B принадлежат этой плоскости, то по теореме 2 вся прямая AB лежит в плоскости ABC. Итак, через прямую AB и точку C проходит плоскость ABC.

Единственность плоскости, проходящей через прямую AB и точку C, следует из того, что любая такая плоскость проходит через точки A, B и C и, значит, совпадает с плоскостью ABC.

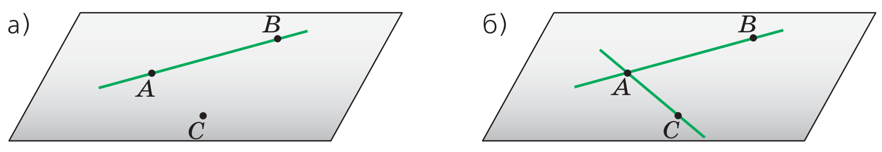
СЛЕДСТВИЕ 2

Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Рассмотрим прямые AB и AC, пересекающиеся в точке A (рис. 6, *б*). По теореме 3 через точки A, B и C проходит единственная плоскость — плоскость ABC. Так как точки A и B принадлежат этой плоскости, то по теореме 2 вся прямая AB лежит в плоскости ABC. Аналогично прямая AC лежит в этой плоскости. Итак, через прямые AB и AC проходит плоскость ABC.

Единственность плоскости, проходящей через прямые AB и AC, следует из того, что любая такая плоскость проходит через точки A, B и C и, значит, совпадает с плоскостью ABC.

В доказательствах теорем 1—3 использовались аксиомы 1—4. Ещё одна (пятая) аксиома стереометрии связана с измерением отрезков и понятием длины отрезка. Эта аксиома позволяет определить длину произвольного отрезка в пространстве таким же образом, как и в планиметрии,



Через точки A, B и C проходит плоскость ABC

Через пересекающиеся прямые AB и AC проходит плоскость ABC

Рис. 6

поскольку каждый отрезок лежит в некоторой плоскости (согласно аксиоме 3), а в каждой плоскости справедливы аксиомы планиметрии (аксиома 1). Как и в планиметрии, длина отрезка AB в пространстве называется также расстоянием между точками A и B.

Подробнее об измерении отрезков в пространстве рассказано в приложении «Система аксиом геометрии» (с. 236). Отметим, что из принятых аксиом следует, что признаки равенства и подобия треугольников справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях.

2 Перпендикуляр к плоскости

Рассмотрим прямую a, пересекающую плоскость α в некоторой точке A (рис. 7). Говорят, что прямая a перпендикулярна к плоскости α, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку A. Прямая a на рисунке 7, *а* перпендикулярна к плоскости α, а на рисунке 7, *б* не перпендикулярна. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $\alpha \perp a$. Говорят также, что плоскость α перпендикулярна к прямой a.

Вокруг нас можно найти много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Так, колонны здания, заводские трубы, подъёмные краны, телеграфные столбы и т. п. перпендикулярны к плоскости земли. На практике правильность установки этих предметов, т. е. их перпендикулярность к плоскости земли, можно проверить при помощи отвеса — небольшого груза, привязанного к верёвке.

Рассмотрим точку A, не лежащую в плоскости α. Отрезок, соединяющий точку A с точкой H плоскости α, называется перпендикуляром, проведённым из точки A к плоскости α, если прямая AH перпендикулярна к плоскости α (рис. 8). Точка H называется основанием перпендикуляра AH. Докажем теорему о перпендикуляре к плоскости.

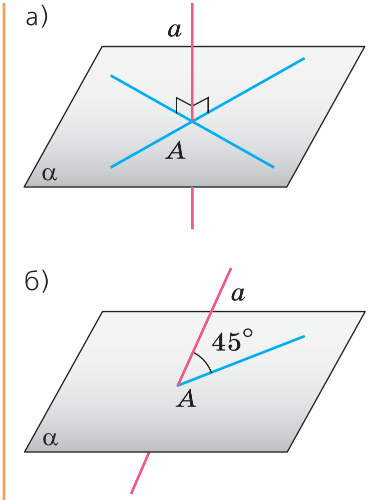
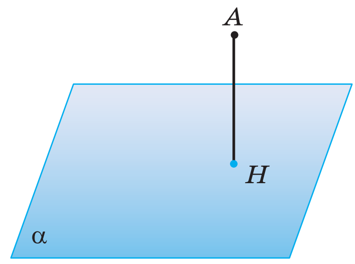


Рис. 7



AH — перпендикуляр к плоскости α

Рис. 8

ТЕОРЕМА

Из точки, не лежащей в плоскости, можно провести перпендикуляр к этой плоскости, и притом только один.

Доказательство. Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Сначала построим отрезок, который, как мы покажем в дальнейшем, и будет перпендикуляром, проведённым из точки A к плоскости α.

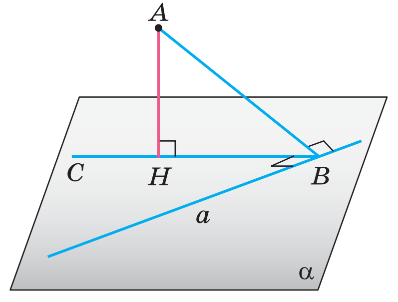


Рис. 9

С этой целью возьмём в плоскости α какую-нибудь прямую a. В плоскости, проходящей через эту прямую и точку A, проведём перпендикуляр AB к прямой a, а в плоскости α через точку B проведём прямую BC, перпендикулярную к прямой a (рис. 9). Затем в плоскости, проходящей через прямую BC и точку A, проведём перпендикуляр AH к прямой BC и докажем, что отрезок AH является перпендикуляром к плоскости α. Для этого нужно доказать, что прямая AH перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку H.

Возможны два случая: 1) H и B — различные точки; 2) точки H и B совпадают.

Рассмотрим сначала первый случай. Проведём в плоскости α произвольную прямую HD, пересекающую прямую a в точке D (рис. 10). Из прямоугольных треугольников ABD, AHB и HBD по теореме Пифагора имеем

$$AD^2 = AB^2 + BD^2, \quad AB^2 = AH^2 + HB^2,$$
$$BD^2 = HD^2 - HB^2.$$

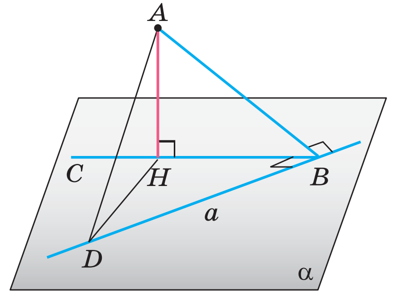


Рис. 10

Складывая второе и третье равенства, получаем

$$AB^2+BD^2=AH^2+HD^2,$$

и, сопоставляя результат с первым равенством, приходим к равенству

$$AD^2=AH^2+HD^2,$$

откуда следует (по обратной теореме Пифагора), что треугольник AHD — прямоугольный и $\angle AHD=90°$, т. е. $AH \perp HD$.

Итак, прямая AH перпендикулярна к любой прямой HD, лежащей в плоскости α и пересекающей прямую a.

Остаётся доказать (в рассматриваемом первом случае), что прямая AH перпендикулярна также к прямой HD, лежащей в плоскости α и параллельной прямой a (рис. 11).

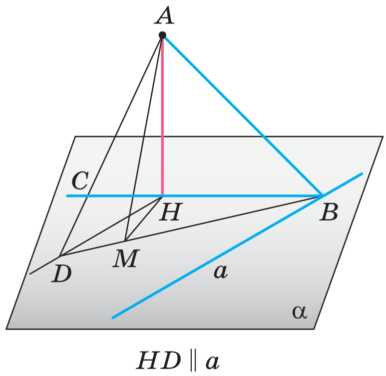


Рис. 11

Отметим произвольную точку M, лежащую между точками B и D. Так как прямые HM и a не параллельны, то согласно доказанному

$$AM^2=AH^2+HM^2. \qquad (1)$$

Если точка M стремится к точке D $(M \to D)$, то $AM \to AD$ и $HM \to HD$, и в результате из равенства (1) получаем

$$AD^2=AH^2+HD^2,$$

откуда следует, что $AH \perp HD$.

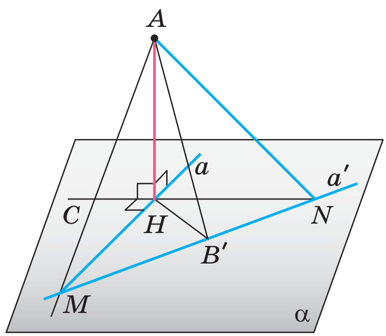


Рис. 12

Таким образом, в первом случае (когда H и B — различные точки) существование перпендикуляра, проведённого из точки A к плоскости α, доказано.

* Перейдём ко второму случаю, когда точки H и B совпадают (рис. 12). В этом случае согласно нашему построению $AH \perp a$, $AH \perp HC$ и $HC \perp a$. Покажем, что можно взять в плоскости α такую прямую a', для которой точки B' и H', аналогичные точкам B и H на прямой a, не совпадают, а значит, согласно доказанному в первом случае из точки A можно провести перпендикуляр к плоскости α.

Проведём в плоскости α прямую a', пересекающую прямые a и HC в точках M и N так, что $HM=HN$.

Прямоугольные треугольники AHM и AHN равны (по двум катетам), поэтому $AM=AN$, и, следовательно, медиана AB' равнобедренного треугольника AMN является его высотой, т. е. $AB' \perp a'$.

Из прямоугольных треугольников AHM и $AB'M$ по теореме Пифагора получаем

$$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2}$$
$$\text{и } AB' = \sqrt{AM^2 - B'M^2},$$

а поскольку $HM > B'M$ (боковая сторона HM равнобедренного треугольника MHN больше половины основания MN), то $AH < AB'$. Отсюда следует, что отрезок AB' не является перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой $B'H$ и, значит, основание H' этого перпендикуляра не совпадает с точкой B'.

Итак, существование перпендикуляра, проведённого из точки A к плоскости α, доказано.

Докажем теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к плоскости α. Предположим, что из точки A проведены два перпендикуляра к плоскости α — отрезки AH и AK (рис. 13). Поскольку $AH \perp \alpha$ и $AK \perp \alpha$, то $AH \perp HK$ и $AK \perp HK$. Тем самым получился треугольник AHK с двумя прямыми углами, чего не может быть. Следовательно, наше предположение неверно, т. е. из точки A можно провести только один перпендикуляр к плоскости α. *

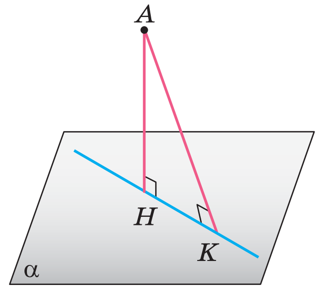
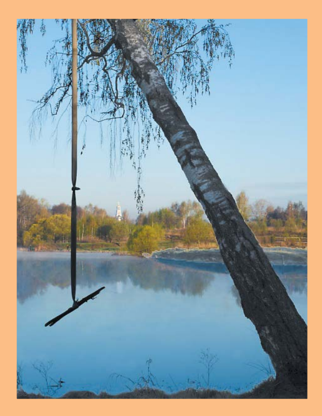


Рис. 13



1

СЛЕДСТВИЕ

Перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости, меньше любого другого отрезка, соединяющего эту точку с какой-то точкой плоскости.

В самом деле, если отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости α, а M — произвольная точка плоскости α, отличная от точки H (рис. 14), то отрезок AH — катет, а отрезок AM — гипотенуза прямоугольного треугольника AHM. Поэтому $AH < AM$.

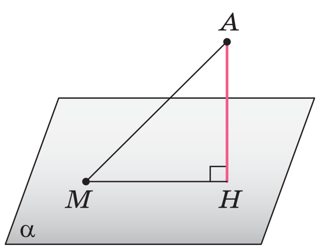


Рис. 14

Длина перпендикуляра, проведённого из точки к плоскости, называется <u>расстоянием от этой точки до плоскости</u>.

3 Наклонная к плоскости

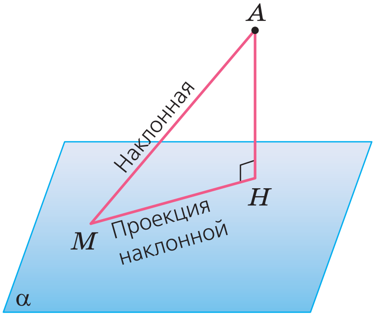
Пусть AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости α, M — произвольная точка плоскости α, отличная от H (рис. 15). Отрезок AM называется наклонной, проведённой из точки A к плоскости α, точка M — основанием наклонной, а отрезок HM — проекцией наклонной. Очевидно, что любая наклонная, проведённая из точки A к плоскости α, больше перпендикуляра, проведённого из точки A к этой плоскости.

ТЕОРЕМА

Если через основание наклонной к плоскости проведена в этой плоскости прямая перпендикулярно к проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна и к самой наклонной; и обратно: если проведённая прямая перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна и к её проекции.

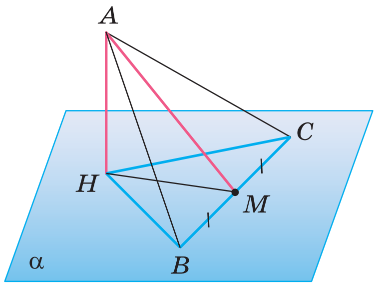
Доказательство. На рисунке 16 отрезки AH и AM — перпендикуляр и наклонная, проведённые из точки A к плоскости α, а прямая BC проведена в этой плоскости через точку M (основание наклонной), причём точки B и C отмечены на прямой так, что $MB = MC$.

Если прямая BC перпендикулярна к проекции наклонной, т. е. $BC \perp HM$, то прямоугольные треугольники HMB и HMC равны по двум катетам, поэтому $HB = HC$, и, следовательно, прямоугольные треугольники AHB и AHC также равны по двум катетам. Отсюда следует, что $AB = AC$, а так как в равнобедренном треугольнике ABC медиана AM является



$AH < AM$

Рис. 15



$AH \perp \alpha$

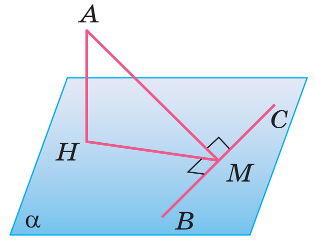
Рис. 16

высотой, то $BC \perp AM$, т. е. прямая BC перпендикулярна к наклонной AM.

Обратно: если $BC \perp AM$, то $\triangle AMB = \triangle AMC$ (по двум катетам), поэтому $AB = AC$, и, следовательно, $\triangle AHB = \triangle AHC$ (по гипотенузе и катету). Отсюда следует, что $HB = HC$, а так как в равнобедренном треугольнике HBC медиана HM является высотой, то $BC \perp HM$, т. е. прямая BC перпендикулярна к проекции наклонной HM.

1

Эта теорема называется теоремой о трёх перпендикулярах, поскольку в ней фигурируют три перпендикуляра: $AH \perp \alpha$, $HM \perp BC$, $AM \perp BC$ (рис. 17).



$AH \perp \alpha$,
$HM \perp BC, AM \perp BC$

Рис. 17

4 Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Докажем теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.

ТЕОРЕМА

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым данной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство. Пусть AM — прямая, перпендикулярная к прямым a и b плоскости α, пересекающимся в точке M (рис. 18, *а*). Докажем, что $AM \perp \alpha$.

Допустим, что это не так. Тогда отрезок AM является наклонной к плоскости α. Проведём перпендикуляр AH к плоскости α (рис. 18, *б*). Точка H не может лежать ни на прямой a, ни на прямой b (иначе получится треугольник AHM с двумя прямыми углами). По теореме о трёх перпендикулярах $a \perp HM$ и $b \perp HM$, т. е. в плоскости α через точку M проходят две прямые (a и b), перпендикулярные к прямой HM. Поскольку это невозможно, то наше предположение неверно, и, следовательно, $AM \perp \alpha$.

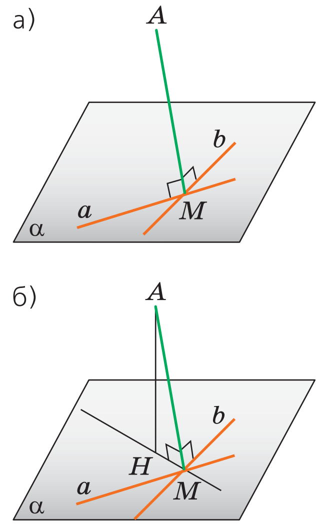


Рис. 18

Этот признак перпендикулярности прямой и плоскости широко используется в технике и в быту. Например, новогоднюю ёлку ставят так, чтобы обеспечить перпендикулярность ствола ёлки к двум доскам крестовины, т. е. перпендикулярность к двум прямым в плоскости пола, а следовательно, и к самой плоскости пола.

5 Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости

С помощью установленного в п. 4 признака докажем ещё две теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости.

ТЕОРЕМА 1

Через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

Доказательство. Докажем сначала, что через произвольную точку A, лежащую на данной прямой a, проходит плоскость, перпендикулярная к прямой a, и притом только одна.

В каких-нибудь двух плоскостях α и β, содержащих прямую a, проведём прямые AB и AC, перпендикулярные к прямой a (рис. 19, *а*). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости плоскость ABC перпендикулярна к прямой a. С другой стороны, если плоскость проходит через точку A перпендикулярно к прямой a, то она пересекает плоскости α и β по прямым, перпендикулярным к прямой a, т. е. по прямым AB и AC. Но через прямые AB и AC проходит только одна плоскость. Следовательно, через точку A проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой a.

Пусть теперь точка A не лежит на данной прямой a (рис. 19, *б*). В плоскости α, проходящей через прямую a и точку A, проведём перпендикуляр AH к прямой a, а затем в какой-нибудь плоскости β, проходящей через

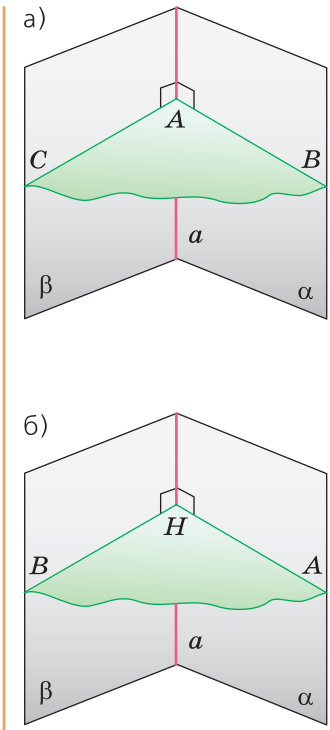


Рис. 19

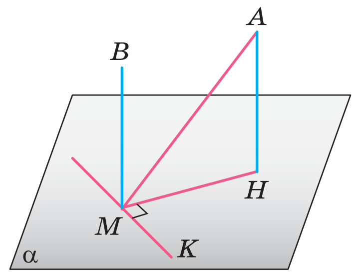
прямую a и отличной от плоскости α, проведём прямую HB, перпендикулярную к прямой a.

Плоскость AHB перпендикулярна к прямой a по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Она является единственной плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой a, поскольку любая такая плоскость пересекает плоскость α по прямой, перпендикулярной к прямой a, т. е. по прямой AH, а через точку H, лежащую на прямой a, проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой a.

ТЕОРЕМА 2

Две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, лежат в одной плоскости.

∗ Доказательство. Пусть $AH \perp \alpha$ и $BM \perp \alpha$ (рис. 20). Требуется доказать, что прямые AH и BM лежат в одной плоскости.



$AH \perp \alpha$ и $BM \perp \beta$

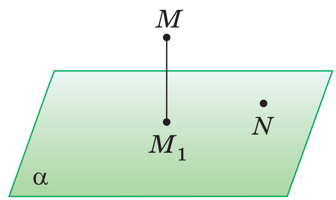
Рис. 20

Проведём в плоскости α прямую MK, перпендикулярную к прямой MH. Согласно теореме о трёх перпендикулярах $MK \perp AM$, и, следовательно, прямая MK перпендикулярна к плоскости AMH (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Так как $MK \perp BM$ (поскольку $BM \perp \alpha$) и $MK \perp MH$, то прямая MK перпендикулярна также к плоскости BMH. Но через точку M проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой MK. Следовательно, плоскости AMH и BMH совпадают, поэтому прямые AH и BM лежат в одной плоскости. ∗

6 Угол между прямой и плоскостью

Ортогональной (прямоугольной) проекцией или кратко — проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама эта точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 21 отрезок MM_1 — перпендикуляр к плоскости α, поэтому точка M_1 — проекция точки M на плоскость α, а точка N — проекция самой точки N на ту же плоскость, поскольку $N \in \alpha$.



Точки M_1 и N — проекции точек M и N на плоскость α

Рис. 21

Рассмотрим произвольную фигуру Φ и построим проекции всех её точек на данную плоскость. Эти проекции образуют плоскую фигуру Φ_1, которая называется проекцией фигуры Φ на данную плоскость.

Докажем теорему о проекции прямой на плоскость.

ТЕОРЕМА

Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.

✱ Доказательство. Пусть a — данная прямая, α — плоскость, не перпендикулярная к прямой a. Если прямая a лежит в плоскости α, то её проекцией на плоскость α является сама эта прямая. Пусть прямая a не лежит в плоскости α. Из какой-нибудь точки M прямой a, не лежащей в плоскости α, проведём перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a и MH (рис. 22). Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1. Докажем, что прямая a_1 является проекцией прямой a на плоскость α.

Согласно теореме 2 п. 5 любой перпендикуляр M_1H_1, проведённый из какой-либо точки M_1 прямой a к плоскости α, лежит в одной плоскости с перпендикуляром MH — в плоскости β, и, следовательно, точка H_1, т. е. проекция точки M_1 на плоскость α, лежит как в плоскости β, так и в плоскости α, а значит, лежит на прямой a_1. Таким образом, проекция любой точки прямой a на плоскость α лежит на прямой a_1.

Верно и обратное: любая точка H_1 прямой a_1 является проекцией на плоскость α некоторой точки M_1 прямой a (обоснуйте это). Следовательно, прямая a_1 — проекция прямой a на плоскость α. ✱

Из доказанной теоремы следует, что проекцией отрезка прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является отрезок. Тем самым понятие проекции наклонной, введённое в п. 3, соответствует общему понятию проекции фигуры.

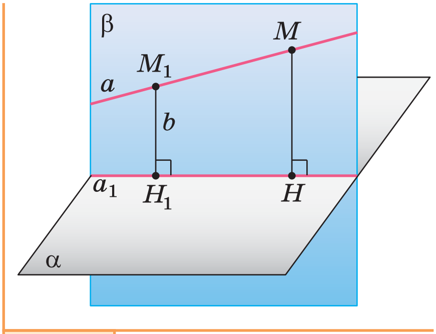
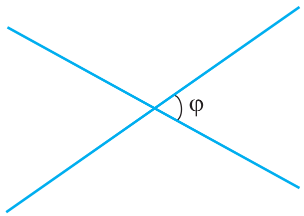
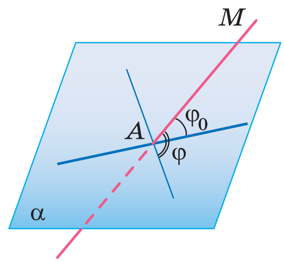


Рис. 22



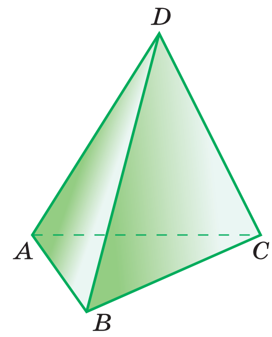
Угол φ между пересекающимися прямыми не превосходит 90°

Рис. 23



$\varphi_0 < \varphi$

Рис. 24



Тетраэдр $DABC$

Рис. 25

С помощью проекции прямой на плоскость введём понятие угла между прямой и плоскостью, но сначала дадим определение угла между пересекающимися прямыми.

Углом между пересекающимися прямыми назовём величину φ наименьшего из четырёх углов, образованных при пересечении этих прямых (рис. 23). Из определения следует, что $0 < \varphi \leqslant 90°$.

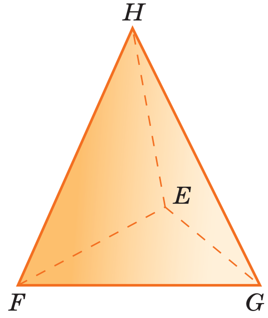
Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, назовём угол между прямой и её проекцией на плоскость; угол между прямой и перпендикулярной к ней плоскостью считается равным 90°.

Можно доказать (см. задачу 37), что угол φ_0 между прямой AM, пересекающей плоскость α в точке A и не перпендикулярной к этой плоскости, и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ, которые прямая AM образует с прямыми, проведёнными в плоскости α через точку A (рис. 24).

7 Тетраэдр

Рассмотрим треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости ABC. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA (рис. 25). Геометрическая фигура, составленная из треугольников ABC, DAB, DBC, DCA и их внутренних областей, называется тетраэдром и обозначается $DABC$. Этот же тетраэдр можно обозначить иначе, расположив буквы A, B, C и D в другом порядке, например $ABDC$.

Треугольники (вместе с их внутренними областями), из которых составлен тетраэдр, называются гранями, их стороны — рёбрами, углы — плоскими углами, а вершины — вершинами тетраэдра. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными. На рисунке 25 противоположными являются рёбра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Обычно



Тетраэдр $HEFG$

Рис. 26

тетраэдр изображают так, как показано на рисунках 25 и 26. Изображением тетраэдра служит его проекция на ту или иную плоскость либо фигура, подобная проекции. При этом штриховыми линиями изображают невидимые рёбра.

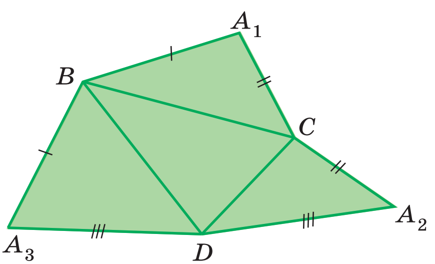
Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют её основанием, тогда три другие грани называются боковыми гранями, а рёбра, по которым пересекаются боковые грани, — боковыми рёбрами тетраэдра.

Перпендикуляр, проведённый из вершины тетраэдра к плоскости противоположной грани, называют высотой тетраэдра.

Если разрезать тетраэдр по боковым рёбрам и развернуть его боковые грани на плоскость основания, то получится плоская фигура, состоящая из четырёх треугольников. Эту фигуру называют развёрткой тетраэдра. На рисунке 27 изображена развёртка тетраэдра $ABCD$.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки фигуры, называется секущей плоскостью этой фигуры, а общая часть фигуры и секущей плоскости — сечением фигуры.

Рассмотрим сечение тетраэдра $OABC$ плоскостью, проходящей через точки L, M и N — середины его боковых рёбер OA, OB и OC (рис. 28). Эта плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по отрезкам LM, MN



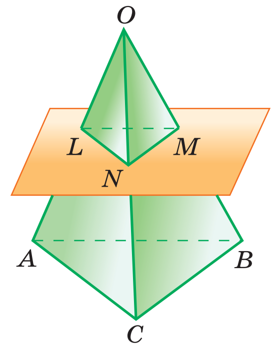
Развёртка тетраэдра $ABCD$ на плоскость BCD. Точки A_1, A_2 и A_3 – вершина A граней ABC, ACD и ADB после развёртки этих граней на плоскость BCD

Рис. 27

и NL, которые являются средними линиями боковых граней. Следовательно,

$$LM = \frac{1}{2}AB,\quad MN = \frac{1}{2}BC,\quad NL = \frac{1}{2}CA,$$

поэтому сечением тетраэдра является треугольник LMN (без внутренней области), подобный треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$.



Треугольник LMN – сечение тетраэдра $OABC$ плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер

Рис. 28

В стереометрии появляется новый класс задач на построение — построение сечений на изображениях фигур. Для тетраэдра это, например, такие задачи: дано изображение тетраэдра на рисунке и даны также изображения трёх точек, которые лежат на указанных рёбрах тетраэдра, либо на продолжениях рёбер, либо в указанных плоскостях граней; требуется построить на этом рисунке изображение сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через три данные точки. Решим задачу такого типа:

Задача

На рисунке 29, *а* изображён тетраэдр $ABCD$. Точка P принадлежит ребру BD, точка Q — ребру CD, точка R — продолжению ребра AD за точку A. Построить (на данном рисунке) изображение сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью PQR (для краткости будем говорить «построить сечение тетраэдра»).

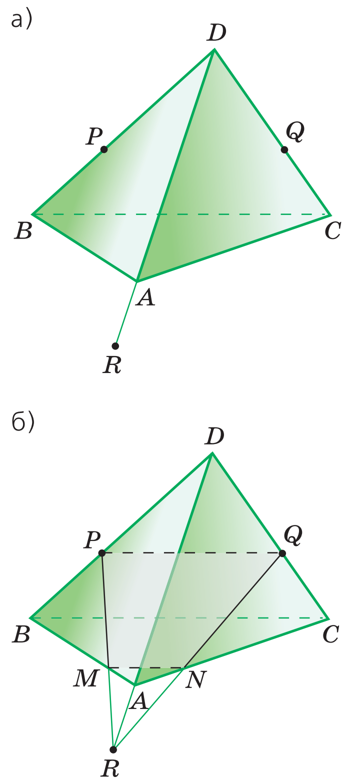


Рис. 29

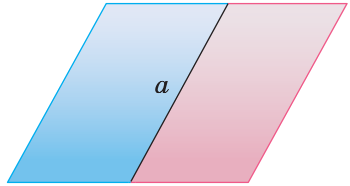
Решение

Прямые AB и PR лежат в одной плоскости (плоскости ABD), поэтому точка M пересечения изображений этих прямых (рис. 29, *б*) является изображением точки пересечения самих прямых. (Обратите внимание на то, что если две прямые не лежат в одной плоскости, то они не пересекаются, но их изображения могут пересекаться.)

Секущая плоскость PQR пересекается с гранью ABD по отрезку PM. Аналогично строим отрезок QN, по которому плоскость PQR пересекается с гранью ACD.

Теперь проводим отрезки MN и PQ и получаем искомое сечение тетраэдра — четырёхугольник $PQNM$. ▲

8 Двугранный угол



Прямая a — граница каждой из двух полуплоскостей

Рис. 30

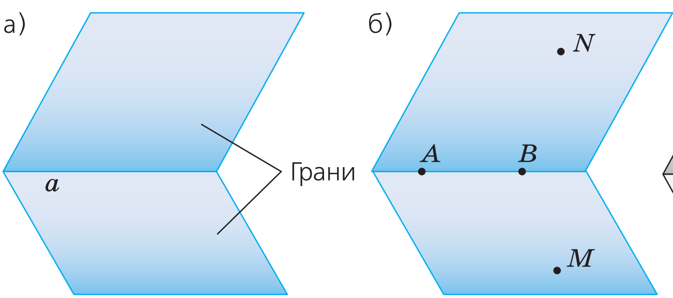
Напомним, что любая прямая, лежащая в плоскости, разделяет множество точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на две части, каждая из которых называется полуплоскостью, а сама прямая называется границей каждой из этих полуплоскостей. На рисунке 30 одна из полуплоскостей с границей a синяя, а другая — красная.

Фигура, состоящая из прямой и двух полуплоскостей, для каждой из которых эта прямая является границей, называется двугранным углом (рис. 31, *а*). Общая граница полуплоскостей называется ребром двугранного угла, а сами полуплоскости — гранями двугранного угла. Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки M и N, называют двугранным углом $MABN$ (рис. 31, *б*).

Обычно под словами «двугранный угол» понимают неразвёрнутый двугранный угол, т. е. такой двугранный угол, грани которого не лежат в одной плоскости. В повседневной жизни нередко встречаются предметы, имеющие форму двугранного угла, например двускатные крыши зданий, две соседние стены комнаты, полураскрытая книга.

С каждым тетраэдром связаны шесть двугранных углов, рёбрами которых являются прямые, содержащие рёбра тетраэдра. Например, одним из двугранных углов тетраэдра $ABCD$ является двугранный угол $CABD$ (рис. 32).

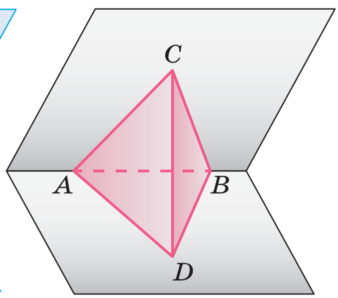
Выберем на ребре CD двугранного угла какую-нибудь точку O и проведём лучи OA и OB, перпендикулярные к ребру и лежащие в разных



Двугранный угол с ребром a

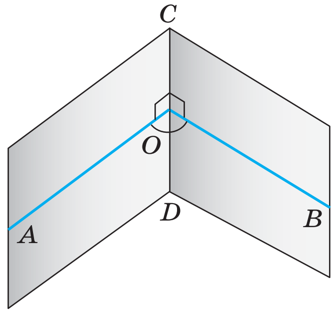
Двугранный угол $MABN$

Рис. 31



Двугранный угол $CABD$ тетраэдра $ABCD$

Рис. 32



Угол AOB – линейный угол двугранного угла $ACDB$

Рис. 33

гранях (рис. 33). Угол AOB называется линейным углом двугранного угла. Поскольку вершину O линейного угла AOB можно выбрать на ребре CD произвольно, то каждый двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов. Справедлива, однако, следующая теорема:

ТЕОРЕМА

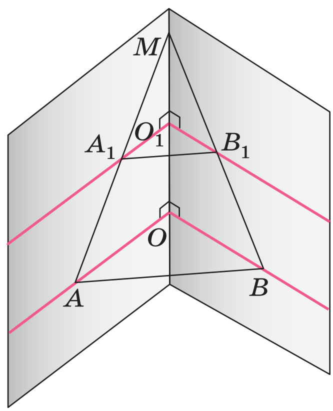
Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Доказательство. Рассмотрим два линейных угла с вершинами O и O_1 данного двугранного угла (рис. 34) и докажем, что эти углы равны.

Отметим на ребре OO_1 точку M так, чтобы точка O_1 оказалась серединой отрезка OM. На сторонах линейного угла с вершиной O отметим произвольные точки A и B. Пусть прямые MA и MB пересекают стороны линейного угла с вершиной O_1 в точках A_1 и B_1.

Поскольку $O_1A_1 \parallel OA$ и $O_1B_1 \parallel OB$ (объясните почему), то отрезки O_1A_1 и O_1B_1 — средние линии прямоугольных треугольников MOA и MOB, и, следовательно, $MA_1 = A_1A$ и $MB_1 = B_1B$.

Таким образом, плоскость линейного угла $A_1O_1B_1$ проходит через середины рёбер MO, MA и MB тетраэдра $MOAB$, поэтому треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны (см. п. 7). Отсюда следует, что $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.



Углы AOB и $A_1O_1B_1$ – линейные углы двугранного угла с ребром OO_1

Рис. 34

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. На рисунке 35 градусная мера двугранного угла равна 100°. Обычно говорят кратко «двугранный угол равен 100°». Двугранный угол называется прямым, если он равен 90°, острым, если он меньше 90°, и тупым, если он больше 90°.

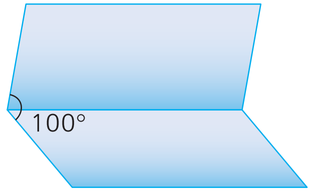
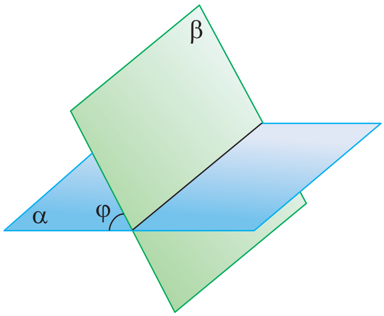


Рис. 35

9 Угол между плоскостями

Рассмотрим две пересекающиеся плоскости α и β. Они образуют четыре двугранных угла с общим ребром. Углом между плоскостями α и β назовём величину φ наименьшего из этих углов (рис. 36). Из определения следует, что $0 < \varphi \leqslant 90°$.



Угол φ между пересекающимися плоскостями не превосходит 90°

Рис. 36

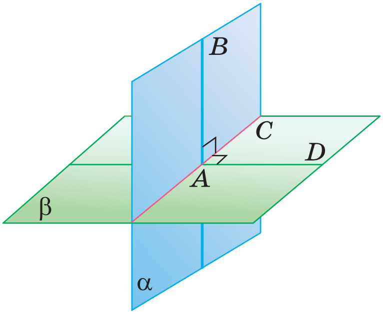
Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \perp \beta$.

Докажем утверждение, выражающее признак перпендикулярности двух плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Пусть плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающую плоскость β в точке A (рис. 37). Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC. Поскольку $AB \perp \beta$, то прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β и проходящей через точку A, в частности $AB \perp AC$.



Угол BAD — линейный угол двугранного угла $BACD$

Рис. 37

Проведём в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. По построению угол BAD — линейный угол двугранного угла $BACD$. Но $\angle BAD = 90°$ (так как $AB \perp \beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен $90°$, т. е. $\alpha \perp \beta$.

Вопросы и задачи

1. а) Точки M и N — середины сторон треугольника ABC. Лежит ли середина отрезка MN в плоскости ABC? Ответ обоснуйте.
б) Две плоскости имеют общую прямую a. Точка A принадлежит обеим плоскостям. Принадлежит ли точка A прямой a? Ответ обоснуйте.
в) Точка D расположена вне плоскости ABC. Может ли точка B лежать на прямой AD? Ответ обоснуйте.
г) Прямые AB и CD лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости прямые AD и BC? Ответ обоснуйте.
д) Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые AB и CD пересекаться? Ответ обоснуйте.
е) Точка P не лежит в плоскости KLM. Через прямую KP и точку M проведена плоскость. Докажите, что она пересекается с плоскостью KLM, и назовите линию пересечения этих плоскостей.
ж) Прямая лежит в одной из двух пересекающихся плоскостей и пересекает другую плоскость. Пересекает ли эта прямая линию пересечения указанных плоскостей? Ответ обоснуйте.
з) Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой? Ответ обоснуйте.
и)* Продолжения сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E, точки M и N — середины отрезков AD и BC, точка L не лежит в плоскости трапеции. Лежит ли точка N в плоскости ELM? Ответ обоснуйте.
к)* Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Может ли точка C не лежать в плоскости, проходящей через точки A, O и B? Ответ обоснуйте.

2. а) Точка D расположена вне плоскости ABC. Могут ли прямые AD и BC пересекаться? Ответ обоснуйте.
б) Точки A, B и C лежат как в плоскости α, так и в плоскости β (плоскости α и β различны). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.
в) Прямые a и b пересекаются в точке M, прямая c пересекает каждую из них и не проходит через точку M. Лежит ли точка M в плоскости, содержащей прямые a и c? Ответ обоснуйте.
г) Прямые AB и CD не лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости прямые AD и BC? Ответ обоснуйте.
д) Докажите, что если точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, то точки A, B и C не лежат на одной прямой.

е) Точка P не лежит в плоскости KLM. Через точки K, L и P проведена плоскость. Пересекается ли прямая MP с этой плоскостью? Ответ обоснуйте.
ж) Одна из двух параллельных прямых плоскости α пересекает плоскость β. Пересекает ли другая из них плоскость β? Ответ обоснуйте.
з) Известно, что какие-то три из данных четырёх точек лежат на одной прямой. Существует ли плоскость, проходящая через четыре данные точки? Ответ обоснуйте.
и)* Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, точка M — середина стороны BC. Точка D не лежит в плоскости ABC. Лежит ли точка M в плоскости DAO, если $AB \neq AC$? Ответ обоснуйте.
к)* Точка O — центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Может ли точка D не лежать в плоскости, проходящей через точки A, O и C? Ответ обоснуйте.

1

3. а) Сторона равностороннего треугольника ABC равна 3, прямая MA перпендикулярна к плоскости ABC. Найдите MB, если $MA = 4$.
б) Точки A и B лежат в плоскости α, а точка M не лежит в этой плоскости. Может ли прямая MA быть перпендикулярной к плоскости α, если $MA > MB$? Ответ обоснуйте.
в) Точка M равноудалена от вершин квадрата $ABCD$, отрезок MH — перпендикуляр, проведённый из точки M к плоскости ABC. Найдите MA, если $AB = 4$, $MH = 1$.
г) Отрезок MH — перпендикуляр, проведённый из точки M к плоскости ABH. Найдите MH, если $MA = 18$ см, $MB = 15$ см и $AH : BH = 5 : 4$.
д) Сторона квадрата $ABCD$ равна a, прямая MA перпендикулярна к плоскости ABC. Найдите MC, если $MA = b$.
е)* Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника ABC, равна 3 см, точка D равноудалена от вершин A, B и C. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, если $DA = 5$ см.

4. а) Точка O — центр равностороннего треугольника ABC, сторона которого равна 3, прямая MO перпендикулярна к плоскости ABC. Найдите AM, если $MO = 1$.
б) Точки A и B лежат в плоскости α, а точка M не лежит в этой плоскости. Может ли прямая MA быть перпендикулярной к плоскости α, если $MA = MB$? Ответ обоснуйте.
в) Точка M равноудалена от вершин равностороннего треугольника ABC, отрезок MH — перпендикуляр, проведённый из точки M к плоскости ABC. Найдите MA, если $AB = 6$, $MH = 2$.
г) Отрезок MH — перпендикуляр, проведённый из точки M к плоскости ABH. Найдите AB, если $MH = 3$ см, $\angle AMB = 60°$ и $\angle MAH = \angle MBH = 30°$ (рис. 38).

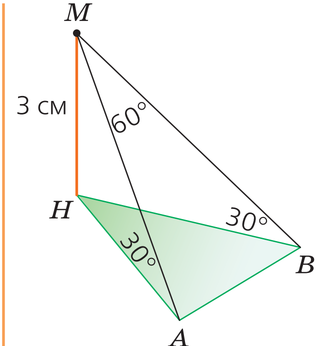


Рис. 38

д) Точка удалена от каждой из вершин прямоугольного треугольника на 13 см, а от его плоскости на 12 см. Найдите гипотенузу треугольника.
е)* Расстояние между любыми двумя из четырёх данных точек равно 1. Найдите расстояние от одной из этих точек до плоскости, проходящей через три остальные точки.

5. а) Из точки проведены к плоскости две равные наклонные. Докажите, что их проекции равны.
б) Наклонная AM к плоскости α равна 2, её проекция HM равна 1. Найдите расстояние от точки A до плоскости α и угол AMH.
в) Перпендикуляр и наклонная, проведённые из точки к плоскости, равны 4 см и 5 см. Чему равна проекция этой наклонной?
г) Треугольник ABC — равносторонний, прямая AM перпендикулярна к плоскости ABC, точка O — середина отрезка BC. Докажите, что прямые BC и MO перпендикулярны.
д) Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BM перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки M до прямой AC, если $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см и $BM = 5$ см (рис. 39).
е) Прямая AM перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$. Найдите площадь треугольника MCD, если $AM = 3$ см, $BM = 5$ см и $AD = 4$ см (рис. 40).
ж) Прямая AM перпендикулярна к плоскости параллелограмма $ABCD$. Найдите расстояние от точки M до прямой CD, если $AM = 5$ см, $BC = 10$ см и $\angle BAD = 60°$ (рис. 41).
з)* Основания равнобедренной трапеции равны 8 см и 18 см, расстояние от точки M до каждой из четырёх прямых, содержащих стороны трапеции, равно 10 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости трапеции.

6. а) Из точки A к плоскости проведены перпендикуляр AH и наклонные AM и AN, причём $AM > AN$. Сравните углы AMH и ANH.
б) Из точки A проведён перпендикуляр AH к плоскости α, расстояние от точки A до плоскости α равно 3 см, расстояние от точки H до прямой l,

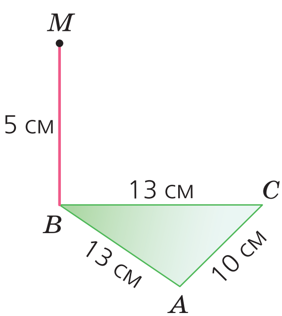


Рис. 39

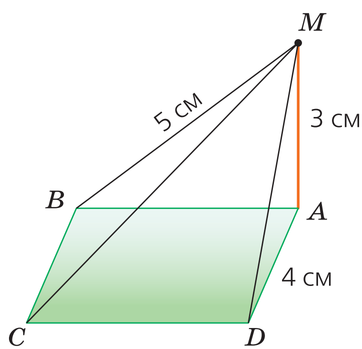


Рис. 40

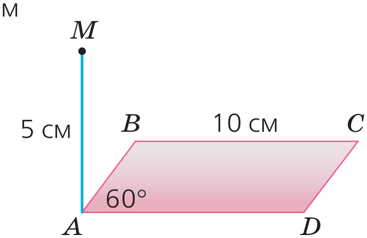


Рис. 41

лежащей в плоскости α, равно 4 см. Найдите расстояние от точки A до прямой l.

в) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Одна из них равна 13 см, а её проекция равна 5 см. Другая наклонная равна 25 см. Найдите её проекцию.

г) Дан ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Прямая MA перпендикулярна к плоскости ABC. Докажите, что прямые BD и MO перпендикулярны.

д) Через вершину C треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, $AC = 6$ см и $MC = 4$ см (рис. 42).

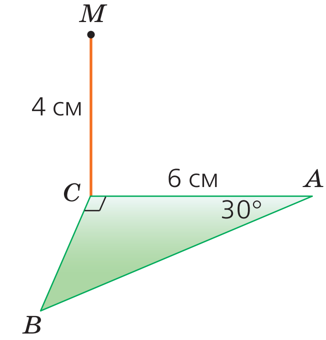


Рис. 42

е) Отрезок CM — медиана треугольника ABC, а отрезок NA — перпендикуляр к его плоскости. Найдите площадь треугольника NBC, если $BC = CM = MB = NA = 5$ см (рис. 43).

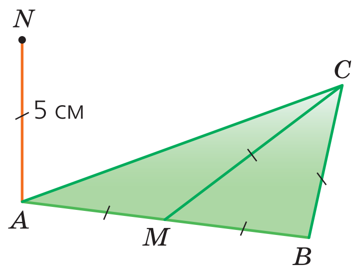


Рис. 43

ж) Угол ACB равен 60°. Отрезок MA, равный 7 см, — перпендикуляр к плоскости ABC. Точка M удалена от прямой BC на 14 см. Найдите AC.

з)* Средняя линия равнобедренной трапеции равна 16 см, один из углов трапеции равен 30°, расстояние от точки M до каждой из четырёх прямых, содержащих стороны трапеции, равно 5 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости трапеции.

7. а) Треугольники ABC и DBC расположены в разных плоскостях, причём $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что прямая BC перпендикулярна к плоскости ADM, если точка M — середина отрезка BC (рис. 44).

б) Точка M не лежит в плоскости ABC. Докажите, что прямая MC перпендикулярна к плоскости ABC, если $MA = MB = 10$, $MC = 8$ и $AC = BC = 6$ (рис. 45).

в) Точка P, не лежащая в плоскости треугольника ABC, равноудалена от его вершин. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что прямая PO перпендикулярна к плоскости ABC.

г) На наклонной MA к плоскости α отмечена точка B так, что $MB : BA = 3 : 2$. Расстояние от точки M до плоскости α равно 20 см. Найдите расстояние от точки B до этой плоскости.

д)* Докажите, что каждая точка плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно к прямой AB, равноудалена от точек A и B.

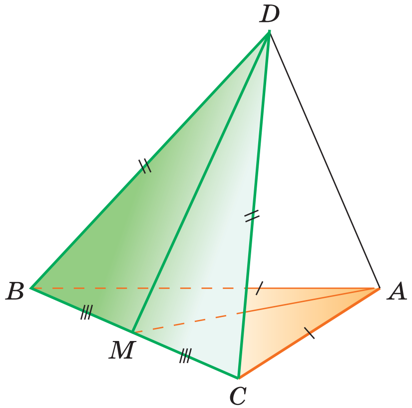


Рис. 44

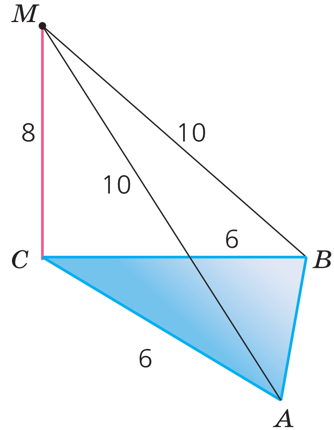


Рис. 45

8. а) Точка M отлична от точки O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, причём $MA = MC$, $MB = MD$ (рис. 46). Докажите, что прямая MO перпендикулярна к плоскости ABC.

б) Точка M не лежит в плоскости α, проходящей через точки A, B и C. Может ли прямая MC быть не перпендикулярной к плоскости α, если $MA = MB = 10$, $MC = 8$ и $AC = BC = 6$? Ответ обоснуйте.

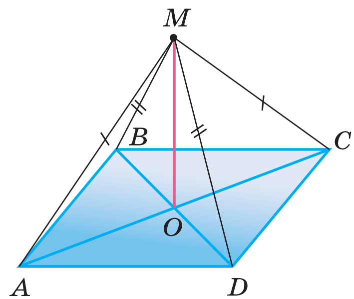


Рис. 46

в) Точка P, не лежащая в плоскости четырёхугольника $ABCD$, равноудалена от его вершин. Докажите, что около этого четырёхугольника можно описать окружность и что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку P, перпендикулярна к плоскости четырёхугольника.

г) Наклонная MA к плоскости α продолжена за точку A на отрезок AB, равный $3MA$. Расстояние от точки M до плоскости α равно 15 см. Найдите расстояние от точки B до этой плоскости.

д)* Докажите, что любая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной к прямой AB.

9. а) Из точки A к плоскости α проведены две равные наклонные AM и AN. Докажите, что угол между прямой AM и плоскостью α равен углу между прямой AN и плоскостью α.

б) Наклонная, проведённая к плоскости α, вдвое больше её проекции на эту плоскость. Найдите угол между наклонной и плоскостью α.

в) Угол между прямой AB и плоскостью α равен φ, $A \in \alpha$ и $AB = d$. Найдите длину проекции отрезка AB на плоскость α.
г) Из точки M, удалённой от плоскости на расстояние d, проведены наклонные MA и MB под углом φ к этой плоскости, $\angle AMB = 2\varphi$. Найдите расстояние между основаниями наклонных.
д) Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC и удалена от его плоскости на расстояние, равное $\sqrt{3}$. Найдите косинус угла между прямой AM и плоскостью ABC, если $AC = BC = 4$, $\angle ACB = 60°$.
е)* Через вершину прямого угла BAC проведена прямая, составляющая угол в $60°$ с каждой из прямых AB и AC. Найдите угол между этой прямой и плоскостью ABC.
ж)* Расстояние от точки M до плоскости ABC равно $\sqrt{6}$, $AB = BC = CA = 6$ и $MA = MB = MC$. Найдите угол между прямой AC и плоскостью BCM.

1

10. а) Из точки A к плоскости α проведены две наклонные AM и AN, причём $AM > AN$. Докажите, что угол между прямой AM и плоскостью α меньше угла между прямой AN и плоскостью α.
б) Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AM, перпендикулярная к плоскости ABC. Найдите угол между прямой MC и этой плоскостью, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см и $AM = 5$ см.
в) Угол между прямой l и плоскостью α равен φ. Найдите длину проекции на плоскость α отрезка длины d, расположенного на прямой l.
г) Из точки, удалённой от плоскости на расстояние d, проведены две наклонные под углом $60°$ к этой плоскости. Угол между проекциями наклонных равен $120°$. Найдите расстояние между основаниями наклонных.
д) Точка M удалена от каждой вершины треугольника ABC на 25 см. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC, если $AC = 7$ см, $BC = 24$ см и $\angle ACB = 90°$.
е)* Расстояние от точки M до плоскости прямого угла BAC равно 6. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AM = 8$, $\angle MAB = \angle MAC$.
ж)* Расстояние от точки M до плоскости квадрата $ABCD$ равно $\sqrt{5}$. Найдите угол между прямой, проходящей через середину отрезка AB и точку D, и плоскостью DMC, если $AB = 2\sqrt{3}$, $MA = MB = MC$.

11. а) Грани ABC и DBC тетраэдра $ABCD$ — равнобедренные треугольники с основанием BC. Докажите, что треугольники ABD и ACD равны.
б) На рисунке 47 изображён тетраэдр $ABCD$, точка R принадлежит ребру BC, а точки P и Q — продолжениям рёбер DA и CA за точку A. Постройте сечение тетраэдра плоскостью PQR.

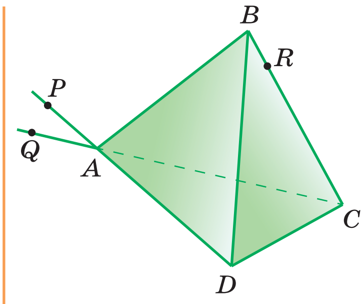


Рис. 47

в) Может ли плоскость пересекать грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ по отрезкам PQ и MN (рис. 48)? Ответ обоснуйте.

г) Все рёбра тетраэдра $ABCD$ равны, точка M — середина его высоты DH. Докажите, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90°$.

д) Изобразите тетраэдр $ABCD$, отметьте точки P, Q и R в гранях ABD, BCD и на продолжении ребра CB за точку B. Постройте сечение тетраэдра плоскостью PQR.

е)* Плоский угол BDC тетраэдра $ABCD$ — прямой. Найдите высоту DH этого тетраэдра, если $DA = DB = DC = \sqrt{3}$, $\angle BAC = 60°$.

ж)* Докажите, что сумма квадратов рёбер тетраэдра в четыре раза больше суммы квадратов трёх отрезков, каждый из которых соединяет середины двух противоположных рёбер (эти отрезки называются бимедианами тетраэдра).

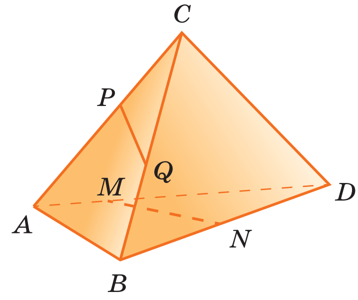


Рис. 48

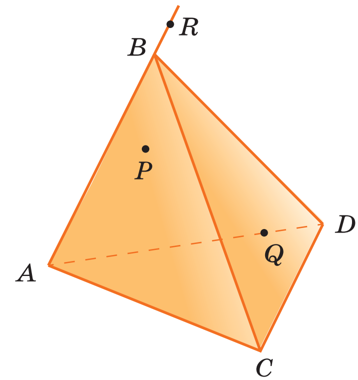


Рис. 49

12. а) Каждый плоский угол с вершиной D тетраэдра $ABCD$ равен 90°. Докажите, что $DA = DB = DC$, если $AB = BC = CA$.

б) На рисунке 49 изображён тетраэдр $ABCD$, точка P принадлежит грани ABC, точка Q — ребру AD, а точка R — продолжению ребра AB за точку B. Постройте сечение тетраэдра плоскостью PQR.

в) Может ли плоскость пересекать грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ по отрезкам PQ и MN (рис. 50)? Ответ обоснуйте.

г) Точка M — середина высоты DH тетраэдра $ABCD$, все плоские углы с вершиной M тетраэдра $MABC$ — прямые. Докажите, что все рёбра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу, если $MA = MB = MC$.

д) Изобразите тетраэдр $ABCD$, отметьте точку L в грани BCD, точку M на ребре AB и точку N на продолжении ребра AD за точку D. Постройте сечение тетраэдра плоскостью LMN.

е)* Найдите радиус окружности, описанной около грани ABC тетраэдра $ABCD$, если $AD = BD = CD = a$, $\angle BDC = \alpha$ и $\angle BAC = \beta$.

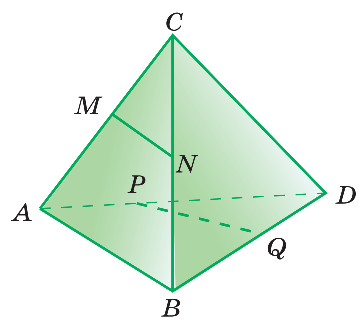


Рис. 50

ж)* Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней (эти отрезки называются медианами тетраэдра), пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины.

13. а) На одной грани двугранного угла, равного φ, отмечена точка A на расстоянии a от ребра. Найдите расстояние от точки A до плоскости другой грани.
б) Найдите угол между ребром двугранного угла и любой прямой, пересекающей ребро и лежащей в плоскости линейного угла этого двугранного угла.
в) Все плоские углы тетраэдра $ABCD$ равны друг другу, отрезок AH — высота треугольника ABC. Докажите, что угол AHD — линейный угол двугранного угла $ABCD$.
г) Прямая AB — проекция прямой AM на плоскость ABC, $AC \perp AB$. Докажите, что угол MAB — линейный угол двугранного угла $MACB$.
д) Грань ABC тетраэдра $ABCD$ — равносторонний треугольник со стороной, равной 2 см. Ребро AD, равное 1 см, перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите двугранный угол $ABCD$.
е) Отрезок DH — высота тетраэдра $ABCD$, двугранные углы тетраэдра с рёбрами AB, BC и CA равны друг другу. Докажите, что точка H — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.
ж) Докажите, что каждая точка общей грани двух равных острых двугранных углов $APQB$ и $BPQC$ равноудалена от плоскостей APQ и CPQ.

14. а) На одной грани двугранного угла, равного φ, отмечена точка A на расстоянии a от ребра. Найдите расстояние от проекции точки A на плоскость другой грани до ребра.
б) Плоскость α пересекает грани двугранного угла по лучам OA и OB. Две прямые, пересекающие ребро двугранного угла, расположены в плоскости α и перпендикулярны к ребру. Докажите, что угол AOB является линейным углом двугранного угла.
в) Докажите, что если все плоские углы тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны.
г) Прямая AB — проекция прямой AM на плоскость ABC, $AC \perp AM$. Докажите, что угол MAB — линейный угол двугранного угла $MACB$.
д) Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите двугранный угол $DABC$, если $CD = \sqrt{3}$, $AC = BC = 5$ и $AB = 8$.
е) Отрезок DH — высота тетраэдра $ABCD$, точка H — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что двугранные углы тетраэдра с рёбрами AB, BC и CA равны друг другу.
ж) Острые двугранные углы $APQB$ и $BPQC$ равны. Из точки M проведены перпендикуляры MH и MK к плоскостям APQ и CPQ, точки H и K принадлежат граням двугранного угла $APQC$, $MH = MK$. Докажите, что точка M лежит в плоскости PQB.

15. а) Сторона AB треугольника ABC расположена в плоскости α, угол между плоскостями ABC и α равен φ, точка C_1 — проекция точки C на плоскость α. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой AB, если расстояние от точки C до прямой AB равно h.

б) Докажите, что плоскость, перпендикулярная к линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

в) Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны, $AB \perp AC$. Докажите, что $AC \perp AD$.

г) Каждое из рёбер AC, BC, AD и BD тетраэдра $ABCD$ равно $\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $CD = 1$ и $\angle ACB = \angle ADB = 90°$.

1

д) Отрезок CD перпендикулярен к плоскости ABC. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $CD = 3$ см, $AC = 6$ см, $\angle ACB = 90°$ и $\angle BAC = 60°$.

е)* Сторона AC треугольника ABC лежит в плоскости α, $\angle BAC = 45°$, а угол между прямой AB и плоскостью α равен $30°$. Найдите угол между плоскостями α и ABC.

ж)* Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если $\angle ACB = 90°$, $AD = BC = \sqrt{21}$ и $AC = BD = 2\sqrt{7}$.

з)* Основание тетраэдра — треугольник со сторонами 3, 4 и 5, каждый двугранный угол при основании равен $45°$. Найдите высоту тетраэдра, проведённую к основанию.

16. а) Сторона AB треугольника ABC расположена в плоскости α, угол между плоскостями ABC и α равен φ. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость α, если площадь треугольника ABC равна S.

б) Докажите, что линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к плоскости α, перпендикулярна к плоскости α.

в) Прямоугольник $ABCD$ и треугольник ABE лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, $AE \perp AC$. Докажите, что $AE \perp AB$.

г) Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABD. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AC = BC$, $\angle ACB = 90°$ и $\angle CAD = 30°$.

д) Отрезок BM перпендикулярен к плоскости ромба $ABCD$. Найдите угол между плоскостями ABC и ADM, если $AB = 10$ см, $BM = 5$ см и $\angle BAD = 30°$.

е)* Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α. Угол между прямой AB и плоскостью α равен $30°$. Найдите угол между плоскостями α и ABC.

ж)* Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если $\angle ABC = \angle BAD = 60°$, $AD = BC = 4$ и $AB = 5$.

з)* Основание тетраэдра — треугольник со сторонами 3, 4 и 5, угол между плоскостью каждой боковой грани и плоскостью основания равен $45°$. Чему может быть равна высота тетраэдра, проведённая к основанию?

§2

Параллельность прямых и плоскостей

10 Параллельные и скрещивающиеся прямые

Как могут быть расположены одна относительно другой две прямые в пространстве?

Наглядное представление об этом дают линии пересечения стен, пола и потолка комнаты. На рисунке 51 изображены линии a и b пересечения плоскости стены с плоскостями потолка и пола, а также линия c пересечения соседней стены с плоскостью пола. Мы видим, что прямые a и b не пересекаются, прямые a и c также не пересекаются. Однако взаимное расположение прямых a и b отличается от взаимного расположения прямых a и c. Отличие состоит в том, что прямые a и b лежат в одной плоскости (в плоскости стены), а прямые a и c не лежат в одной плоскости.

2

Опираясь на этот пример, обсудим два возможных случая расположения непересекающихся прямых в пространстве. Начнём с определения.

Определение

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Рис. 51

Согласно этому определению прямые a и b на рисунке 51 параллельны, а прямые a и c параллельными не являются.

Параллельность прямых a и b в пространстве обозначается так же, как и на плоскости: $a \parallel b$.

Докажем основную теорему о параллельных прямых в пространстве.

ТЕОРЕМА

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство. Пусть a — данная прямая, M — точка, не лежащая на этой прямой. Докажем, что через точку M проходит единственная прямая, параллельная прямой a.

Прямая, параллельная прямой a и проходящая через точку M, должна лежать в одной плоскости с прямой a (согласно определению параллельных прямых), а через прямую a и точку M проходит единственная плоскость. На рисунке 52 эта плоскость обозначена буквой α. Итак, искомая прямая должна лежать в плоскости α, а из курса планиметрии мы знаем, что в плоскости α через точку M проходит единственная прямая, параллельная прямой a. На рисунке 52 эта прямая обозначена буквой b. Таким образом, b — единственная прямая в пространстве, проходящая через точку M и параллельная прямой a.

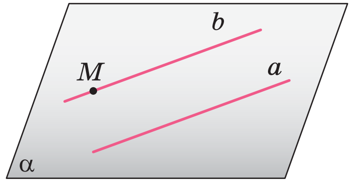


Рис. 52

2

Обратимся теперь ко второму случаю расположения непересекающихся прямых в пространстве.

Определение

Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Прямые a и c на рисунке 51 являются скрещивающимися. Ещё один пример скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой. Ясно, что скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны, — иначе они лежали бы в одной плоскости.

Докажем утверждение, выражающее признак скрещивающихся прямых.

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые являются скрещивающимися.

Пусть прямая AB лежит в плоскости α, а прямая CD пересекает эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 53). Докажем, что прямые AB и CD скрещивающиеся, т. е. они не лежат в одной плоскости.

Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в одной плоскости, то эта плоскость будет проходить через прямую AB и точку C и, следовательно, будет совпадать с плоскостью α. Но это невозможно, поскольку прямая CD не лежит в плоскости α.

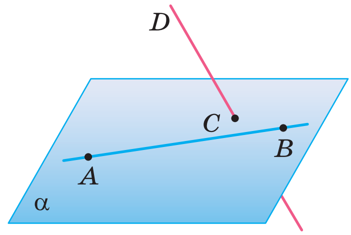
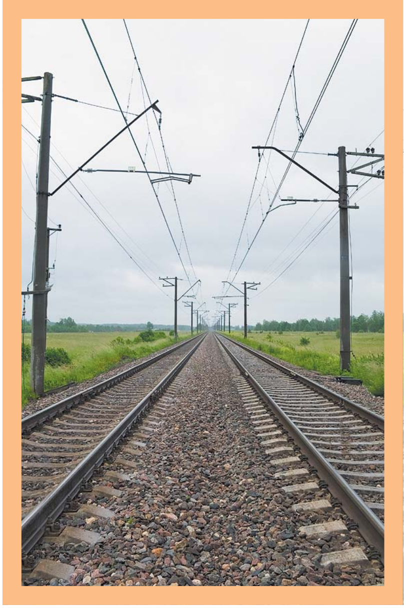


Рис. 53

Итак, две прямые в пространстве могут пересекаться, могут быть параллельными и могут быть скрещивающимися.



11 Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Докажем две теоремы о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к некоторой плоскости.

ТЕОРЕМА 1

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Доказательство. Рассмотрим прямые AH и BK, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её в точках H и K (рис. 54). Докажем, что $AH \parallel BK$.

Прямые AH и BK лежат в одной плоскости (по теореме 2 п. 5). Кроме того, прямые AH и BK перпендикулярны к прямой HK, так как $AH \perp \alpha$ и $BK \perp \alpha$. Следовательно, $AH \parallel BK$.

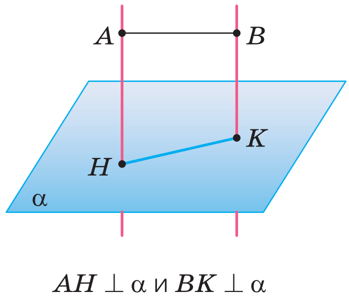


Рис. 54

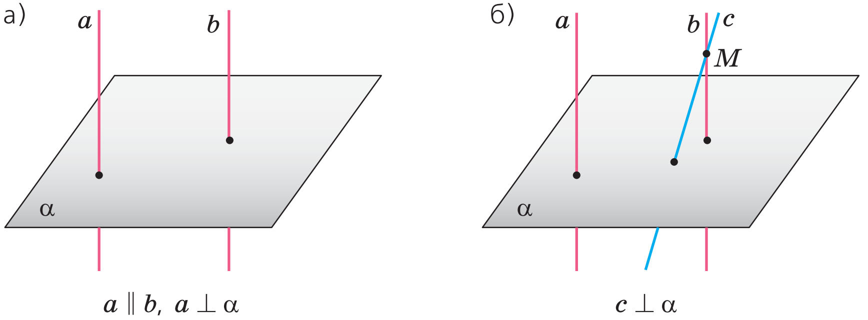


Рис. 55

2

Докажем обратную теорему.

ТЕОРЕМА 2

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство. Рассмотрим параллельные прямые a и b, одна из которых, например прямая a, перпендикулярна к плоскости α (рис. 55, *а*). Докажем, что прямая b также перпендикулярна к плоскости α.

Предположим, что это не так. Возьмём на прямой b какую-нибудь точку M и проведём через неё прямую c, перпендикулярную к плоскости α (рис. 55, *б*). Поскольку $a \perp \alpha$ и $c \perp \alpha$, то согласно теореме 1 $c \parallel a$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (b и c), параллельные прямой a, чего не может быть. Следовательно, наше предположение неверно, поэтому $b \perp \alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 1

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Рассмотрим прямые a и b, параллельные прямой c, и докажем, что $a \parallel b$.

Через произвольную точку прямой c проведём плоскость α (рис. 56), перпендикулярную к прямой c (см. п. 4). Так как $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$ (по теореме 2). Следовательно, $a \parallel b$ (по теореме 1).

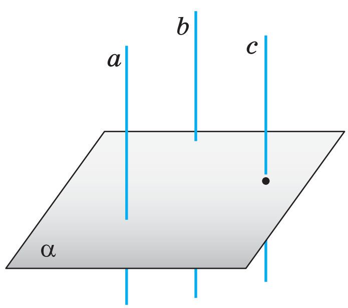
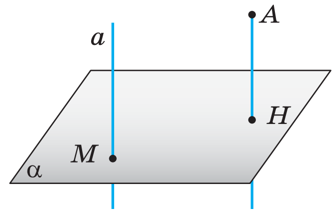


Рис. 56

СЛЕДСТВИЕ 2

Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к этой плоскости, и притом только одна.



$M \in \alpha$, $AH \perp \alpha$, $a \parallel AH$

Рис. 57

Действительно, пусть M — данная точка плоскости α. Из произвольной точки A, не лежащей в данной плоскости α, проведём перпендикуляр AH к плоскости α (рис. 57).

Если точка H совпадает с точкой M, то прямая AH — искомая.

Если же точка H не совпадает с точкой M, то проведём через точку M прямую a, параллельную прямой AH. По теореме 2 прямая a перпендикулярна к плоскости α, т. е. прямая a — искомая.

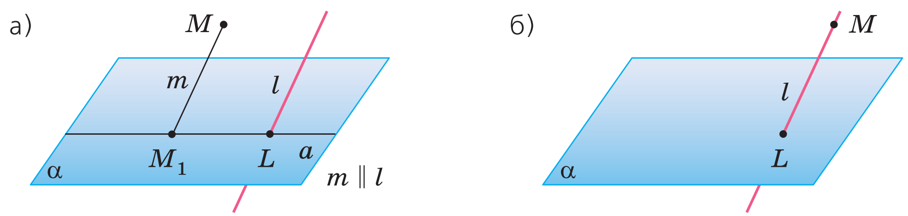
Через точку M не может проходить другая прямая, перпендикулярная к плоскости α, — иначе согласно теореме 1 через точку M проходили бы две прямые, параллельные прямой AH.

2

12 Параллельная проекция

Рассмотрим плоскость α и прямую l, пересекающую эту плоскость в точке L. Через произвольную точку M, не лежащую на прямой l, проведём прямую m, параллельную прямой l (рис. 58, *а*). Докажем, что она также пересекает плоскость α.

В самом деле, через прямые l и m проходит плоскость (обозначим её буквой β), пересекающаяся с плоскостью α по некоторой прямой a, на которой лежит точка L. В плоскости β прямая a пересекает прямую l (в точке L), поэтому она пересекает и параллельную ей прямую m в некоторой точке M_1. Поскольку $M_1 \in a$, то $M_1 \in \alpha$.



Точка M_1 – параллельная проекция точки M на плоскость α

Точка L – параллельная проекция точки M на плоскость α

Рис. 58

Точка M_1, в которой прямая m пересекает плоскость α, называется проекцией точки M на плоскость α при проектировании параллельно прямой l или кратко — параллельной проекцией точки M.

Если точка M лежит на прямой l, то её параллельной проекцией называется точка L пересечения прямой l и плоскости α (рис. 58, *б*).

Возьмём произвольную фигуру Φ и построим параллельные проекции всех её точек на плоскость α. Эти проекции образуют плоскую фигуру, которая называется параллельной проекцией фигуры Φ на плоскость α. Рассмотрим случай, когда фигура Φ является прямой a, не параллельной прямой l и не совпадающей с ней. Докажем, что

2

параллельной проекцией прямой a на плоскость α является прямая.

✱ Если прямая a лежит в плоскости α, то её параллельной проекцией является сама эта прямая.

Если же прямая a не лежит в плоскости α, то отметим на этой прямой какую-нибудь точку A, не лежащую в плоскости α, и построим её параллельную проекцию A_1. Через прямые a и AA_1, имеющие общую точку A, проходит плоскость — обозначим её буквой β (рис. 59). Плоскость β пересекает плоскость α по некоторой прямой a_1, на которой лежит точка A_1. Эта прямая и есть параллельная проекция прямой a.

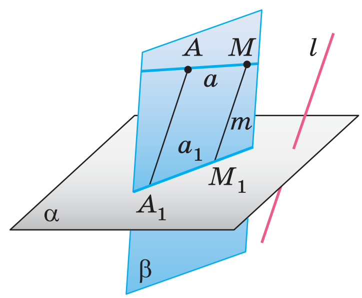


Рис. 59

В самом деле, если через произвольную точку M прямой a провести в плоскости β прямую m, параллельную прямой AA_1 (при этом $m \parallel l$ либо m совпадает с l, так как $AA_1 \parallel l$, согласно следствию 1 п. 11), то прямая m пересечёт прямую a_1 в некоторой точке M_1, которая является параллельной проекцией точки M. Таким образом, параллельная проекция любой точки M прямой a лежит на прямой a_1.

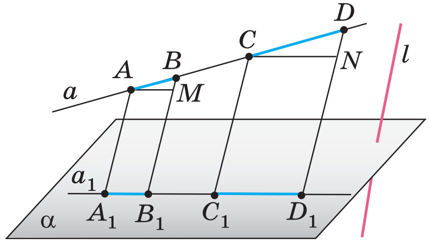
И обратно: если через произвольную точку M_1 прямой a_1 провести в плоскости β прямую m, параллельную прямой AA_1, то прямая m пересечёт прямую a в некоторой точке M, т. е. любая точка M_1 прямой a_1 является параллельной проекцией некоторой точки M прямой a. Это и означает, что прямая a_1 — параллельная проекция прямой a. ✱

Возьмём на прямой a, не лежащей в плоскости α, какие-нибудь два отрезка AB и CD. Очевидно, что их параллельными проекциями на плоскость α являются отрезки A_1B_1 и C_1D_1, лежащие на прямой a_1

(рис. 60, на этом рисунке $AM \parallel A_1B_1$ и $CN \parallel C_1D_1$).

Используя рисунок 60, можно доказать что $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD}$, т. е.

- **параллельные проекции отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам.**



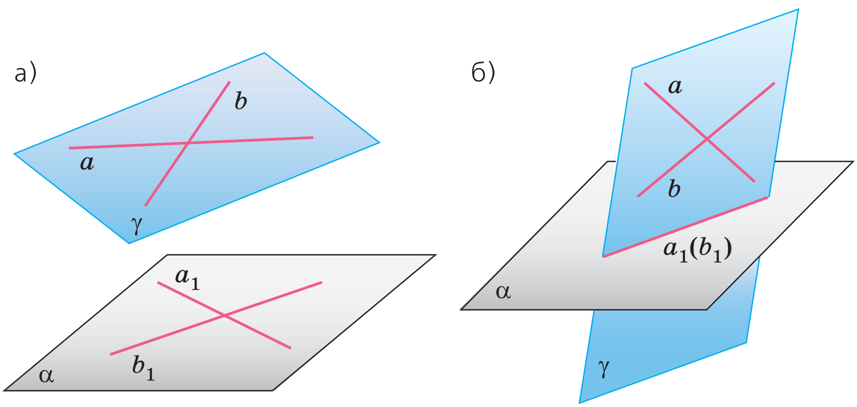
Параллельные проекции A_1B_1 и C_1D_1 отрезков AB и CD, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам

Рис. 60

Рассмотрим теперь прямые a и b, лежащие в некоторой плоскости γ, и их параллельные проекции на плоскость α — прямые a_1 и b_1 (мы предполагаем, что каждая из прямых a и b не параллельна прямой l и не совпадает с ней). Если прямые a и b пересекаются, то прямые a_1 и b_1 имеют общую точку (параллельную проекцию точки пересечения прямых a и b), поэтому они либо пересекаются (рис. 61, *а*), либо совпадают (рис. 61, *б*). Таким образом,

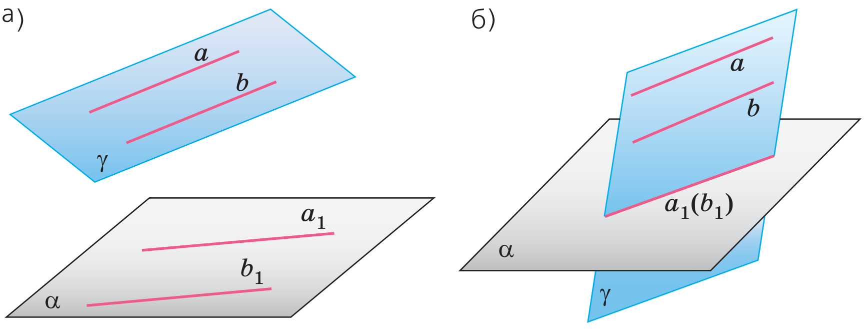
- **параллельной проекцией двух пересекающихся прямых является либо пара пересекающихся прямых, либо одна прямая.**

Если же $a \parallel b$, то прямые a_1 и b_1 либо параллельны (рис. 62, *а*), либо совпадают (рис. 62, *б*). В самом деле, если прямые a_1 и b_1 не совпадают, то прямые a и b являются проекциями прямых a_1 и b_1 на плоскость γ при



Прямые a_1 и b_1 – параллельные проекции на плоскость α пересекающихся прямых a и b

Рис. 61



Прямые a_1 и b_1 – параллельные проекции на плоскость α параллельных прямых a и b

2

Рис. 62

проектировании параллельно прямой l (объясните почему). Поэтому если предположить, что прямые a_1 и b_1 пересекаются, то окажется, что прямые a и b либо пересекаются, либо совпадают, а это противоречит условию. Следовательно,

- **параллельной проекцией двух параллельных прямых являются либо две параллельные прямые, либо одна прямая.**

Докажем, что

- **параллельные проекции параллельных отрезков пропорциональны самим отрезкам.**

Пусть отрезки A_1B_1 и C_1D_1 — проекции параллельных отрезков AB и CD на плоскость α. Требуется доказать, что

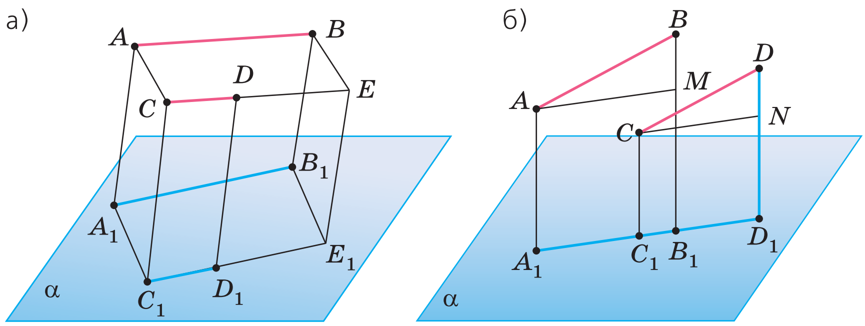
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD}. \qquad (1)$$

Отложим на луче CD отрезок CE, равный AB (рис. 63, *а*; на этом рисунке точка D лежит между точками C и E, доказательство никак не изменится при любом другом расположении точек C, D и E). Так как $CE \parallel AB$ и $CE = AB$, то четырёхугольник $ABEC$ — параллелограмм, поэтому

$$AC \parallel BE.$$

Рассмотрим случай, когда проекциями параллельных прямых AB и CD являются параллельные прямые A_1B_1 и C_1D_1, а не одна прямая (см. рис. 63, *а*). В этом случае $A_1B_1 \parallel C_1E_1$ и $A_1C_1 \parallel B_1E_1$. Следовательно, четырёхугольник $A_1B_1E_1C_1$ — параллелограмм, поэтому

$$C_1E_1 = A_1B_1.$$



Проекции A_1B_1 и C_1D_1 параллельных отрезков AB и CD пропорциональны самим отрезкам

Рис. 63

2

Так как C_1E_1 и C_1D_1 — параллельные проекции отрезков CE и CD, лежащих на одной прямой, то

$$\frac{C_1E_1}{CE} = \frac{C_1D_1}{CD},$$

а поскольку

$$C_1E_1 = A_1B_1 \text{ и } CE = AB,$$

то

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD}.$$

Таким образом, справедливость равенства (1) в этом случае доказана.

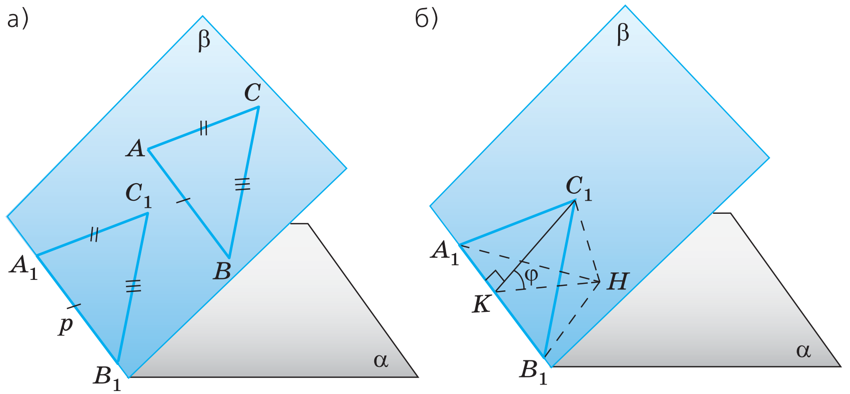
Случай, когда проекцией параллельных прямых AB и CD является одна прямая, более простой. Используя рисунок 63, *б* (на этом рисунке $AM \parallel A_1B_1$ и $CN \parallel C_1D_1$), докажите справедливость равенства (1) в этом случае.

Из доказанных утверждений следует, что

- **параллельные проекции параллельных равных отрезков равны.**

Параллельная проекция широко используется при изучении свойств пространственных фигур. Например, на рисунках изображают не сами фигуры, а их параллельные проекции или фигуры, им подобные. При этом плоскость проекций (плоскость α) и прямую l, параллельно которой производится проектирование, выбирают так, чтобы получить наглядное представление о фигуре.

Отметим, что ортогональная проекция, рассмотренная в п. 6, является частным случаем параллельной проекции. В этом случае прямая l, параллельно которой производится проектирование, перпендикулярна к плоскости проекций.



$A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$,
$A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$

$C_1H \perp \alpha$, $C_1K \perp A_1B_1$

Рис. 64

Докажем теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.

ТЕОРЕМА

Площадь $S_{\text{пр}}$ ортогональной проекции многоугольника выражается формулой

$$S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi, \tag{1}$$

где S — площадь многоугольника, φ — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций ($0 < \varphi < 90°$).

∗ Доказательство. Сначала докажем справедливость формулы (1) для треугольника ABC, у которого одна из сторон, например AB, параллельна прямой p, по которой пересекаются плоскость проекций (плоскость α) и плоскость треугольника ABC (плоскость β, рис. 64, *а*).

В плоскости β построим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы его сторона A_1B_1, равная стороне AB, лежала на прямой p, а стороны A_1C_1 и B_1C_1 были соответственно параллельны и равны сторонам AC и BC.

Проведём перпендикуляр C_1H к плоскости α (рис. 64, *б*). Треугольник A_1B_1H является ортогональной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость α. Проведём высоту C_1K треугольника $A_1B_1C_1$. По теореме о трёх перпендикулярах $HK \perp A_1B_1$, поэтому угол C_1KH (линейный угол двугранного угла с ребром A_1B_1) равен углу между плоскостями α и β, т. е. $\angle C_1KH = \varphi$. Следовательно, $HK = C_1K \cdot \cos\varphi$ и

$$S_{A_1B_1H} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot HK = \left(\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot C_1K\right)\cos\varphi = S_{A_1B_1C_1} \cdot \cos\varphi. \tag{2}$$

Так как стороны треугольника ABC соответственно параллельны и равны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, а проекции параллельных равных отрезков равны, то проекцией треугольника ABC является треугольник, равный треугольнику A_1B_1H. Поэтому для площади $S_{\text{пр}}$ проекции треугольника ABC в силу (2) получаем равенство

$$S_{\text{пр}} = S_{A_1B_1C_1} \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi.$$

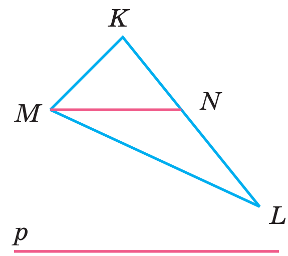
Тем самым справедливость формулы (1) для треугольника ABC доказана.

Рассмотрим теперь произвольный многоугольник с площадью S, лежащий в плоскости β. Разобьём его на треугольники, а каждый треугольник, не имеющий стороны, параллельной прямой p или лежащей на прямой p, разобьём на два треугольника с общей стороной, параллельной прямой p или лежащей на этой прямой (рис. 65, *а*). В результате многоугольник будет разбит на треугольники со стороной, параллельной прямой p или лежащей на ней.

Запишем формулу (1) для каждого из этих треугольников и сложим равенства. В результате в левой части равенства получим сумму площадей проекций треугольников, т. е. площадь $S_{\text{пр}}$ проекции многоугольника, а в правой части, вынеся общий множитель $\cos\varphi$ за скобки, получим произведение суммы площадей указанных треугольников на $\cos\varphi$, т. е. произведение $S \cdot \cos\varphi$.

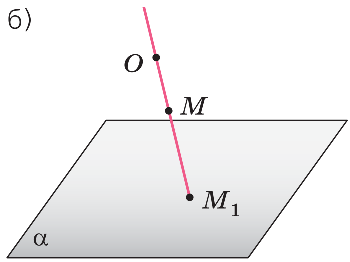
Итак, $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi$, что и требовалось доказать. ✱

а)



Треугольник LKM разбит на два треугольника с общей стороной MN, параллельной прямой p

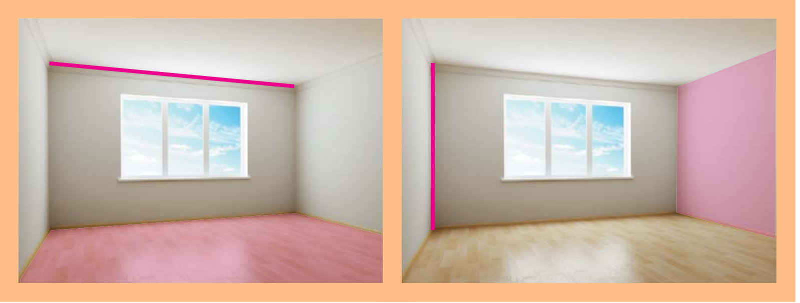
б)



Точка M_1 — центральная проекция (с центром O) точки M на плоскость α

Рис. 65

Замечание. Наряду с ортогональной и параллельной проекциями фигур иногда используется центральная проекция. Она определяется так. Рассмотрим произвольную плоскость α и точку O, не лежащую в этой плоскости. Пусть прямая OM пересекает плоскость α в некоторой точке M_1 (рис. 65, *б*). Тогда точка M_1 называется центральной проекцией (с центром O) точки M на плоскость α. Центральной проекцией фигуры на плоскость α называется множество центральных проекций на плоскость α всех точек этой фигуры. Примером центральной проекции фигуры является её фотографический снимок.



13 Параллельность прямой и плоскости

Обсудим теперь один из возможных случаев взаимного расположения прямой и плоскости.

Определение

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Так, например, линия пересечения стены и потолка комнаты параллельна плоскости пола, линия пересечения двух стен параллельна каждой из двух других стен комнаты. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$.

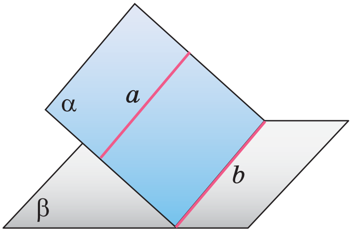
Докажем несколько утверждений, связанных с параллельностью прямой и плоскости.

ТЕОРЕМА 1

Если прямая лежит в одной из двух пересекающихся плоскостей и параллельна другой плоскости, то она параллельна линии пересечения этих плоскостей.

Доказательство. Пусть прямая a, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β, а прямая b — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 66). Докажем, что $a \parallel b$.

Если бы прямые a и b имели общую точку, то прямая a имела бы общую точку с плоскостью β, что противоречит условию ($a \parallel \beta$). Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости (в плоскости α) и не имеют общих точек. Следовательно, они параллельны.



Если $a \parallel \beta$, то $a \parallel b$

Рис. 66

Можно сказать, что доказанная теорема выражает признак параллельности двух прямых в пространстве.

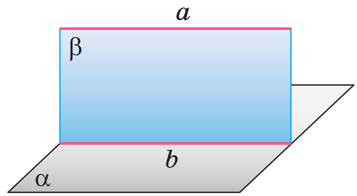
Вторая теорема выражает признак параллельности прямой и плоскости.

ТЕОРЕМА 2

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a, не лежащая в плоскости α, параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 67). Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Рассмотрим плоскость β, в которой лежат параллельные прямые a и b. Она пересекается с плоскостью α по прямой b, т. е. все общие точки плоскостей α и β лежат на прямой b. Поскольку прямая a, лежащая в плоскости β, не имеет общих точек с прямой b ($a \parallel b$), то прямая a не имеет общих точек с плоскостью α. Это означает, что $a \parallel \alpha$.



Если $a \parallel b$, то $a \parallel \alpha$

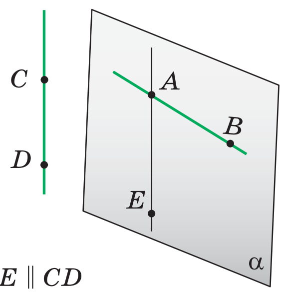
Рис. 67

Опираясь на теоремы 1 и 2, докажем, что

через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Пусть AB и CD — скрещивающиеся прямые. Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и притом только одна.

Проведём через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE (рис. 68). Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то $CD \parallel \alpha$ (по теореме 2). Итак, α — искомая плоскость.



$AE \parallel CD$

Рис. 68

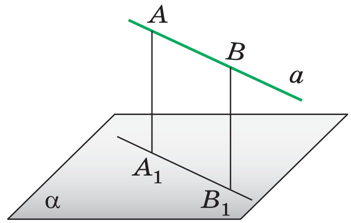
Докажем теперь, что такая плоскость только одна. В самом деле, если плоскость β проходит через прямую AB и параллельна прямой CD, то плоскость ACD пересекается с плоскостью β по прямой, параллельной прямой CD (по теореме 1) и проходящей через точку A, т. е. по прямой AE. Следовательно, плоскость β проходит через прямые AB и AE и потому совпадает с плоскостью α. Это доказывает единственность искомой плоскости.

ТЕОРЕМА 3

Все точки прямой, параллельной плоскости, равноудалены от этой плоскости.

Доказательство. Рассмотрим прямую a, параллельную плоскости α, возьмём на ней произвольные точки A и B и проведём перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости α (рис. 69). Докажем, что $AA_1 = BB_1$.

Поскольку прямые AA_1 и BB_1 перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны (по теореме 1 п. 11). Согласно теореме 1 плоскость, проходящая через эти прямые, пересекает плоскость α по прямой A_1B_1, параллельной прямой AB. Тем самым длина каждого из отрезков AA_1 и BB_1 равна расстоянию между параллельными прямыми AB и A_1B_1, поэтому $AA_1 = BB_1$.



Если $a \parallel \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 = BB_1$

Рис. 69

Расстояние от произвольной точки прямой до параллельной ей плоскости называется расстоянием между этой прямой и плоскостью.

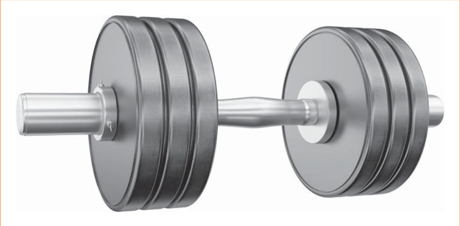
14 Параллельные плоскости

Сформулируем определение параллельных плоскостей.

Определение

Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Примером параллельных плоскостей являются плоскости пола и потолка комнаты. Обратим внимание на то, что каждая из этих плоскостей перпендикуляр-



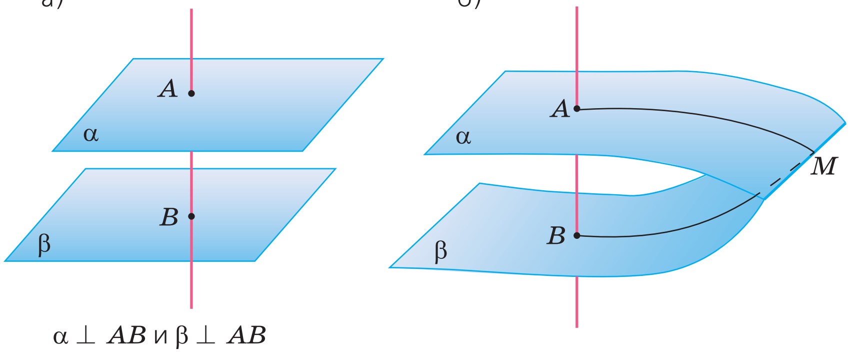


Рис. 70

на к линии пересечения двух стен. Это наблюдение приводит к следующему признаку параллельности двух плоскостей:

1° Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.

Рассмотрим плоскости α и β, перпендикулярные к прямой AB и пересекающие эту прямую соответственно в точках A и B (рис. 70, *а*). Допустим, что плоскости α и β пересекаются. Тогда через любую общую точку M этих плоскостей проходят две плоскости, перпендикулярные к прямой AB (рис. 70, *б*), чего не может быть (в силу теоремы 1 п. 5). Следовательно, наше предположение о пересечении плоскостей α и β ошибочно, и, значит, $\alpha \parallel \beta$.

Рассмотрим ещё два признака параллельности двух плоскостей.

2° Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

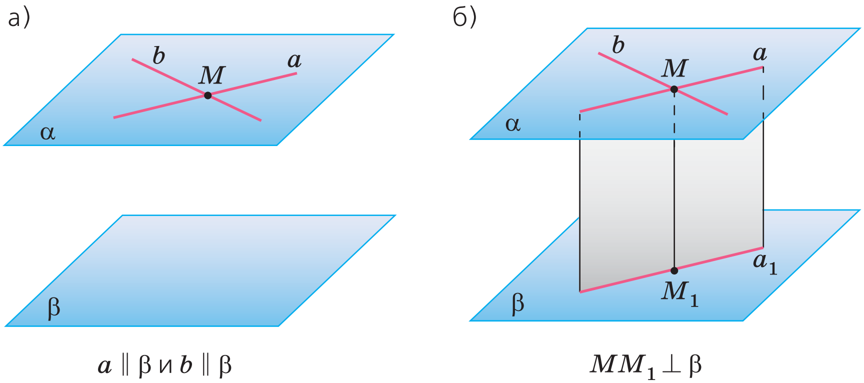


Рис. 71

Рассмотрим прямые a и b, лежащие в плоскости α, пересекающиеся в точке M и параллельные плоскости β: $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$ (рис. 71, *а*). Докажем, что $\alpha \parallel \beta$.

Проведём из точки M перпендикуляр MM_1 к плоскости β. Плоскость, проходящая через пересекающиеся прямые a и MM_1, пересекает плоскость β по прямой a_1 (рис. 71, *б*), параллельной прямой a (по теореме 1 п. 13). Поскольку $MM_1 \perp \beta$, то $MM_1 \perp a_1$, поэтому $MM_1 \perp a$.

Аналогично получаем $MM_1 \perp b$. Из этого следует, что $MM_1 \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Итак, $MM_1 \perp \alpha$, $MM_1 \perp \beta$, поэтому $\alpha \parallel \beta$ согласно утверждению 1°.

2

3° Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

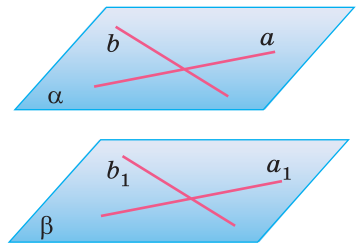
Докажите это утверждение самостоятельно, используя рисунок 72.

Докажем ещё несколько утверждений о параллельных плоскостях.

4° Если через каждую из скрещивающихся прямых проведена плоскость, параллельная другой прямой, то эти плоскости параллельны.

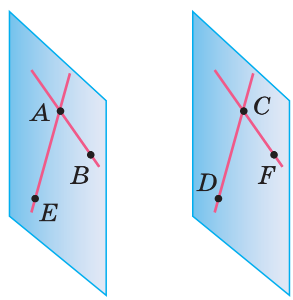
Пусть AB и CD — скрещивающиеся прямые. Проведём через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, а через точку C прямую CF, параллельную прямой AB (рис. 73). Тогда плоскость ABE параллельна прямой CD, а плоскость CDF параллельна прямой AB (по теореме 2 п. 13).

Так как пересекающиеся прямые AB и AE плоскости ABE соответственно параллельны прямым CF и CD плоскости CDF, то согласно утверждению 3° эти плоскости параллельны.



Если $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, то $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$, поэтому $\alpha \parallel \beta$

Рис. 72



$AE \parallel CD$ и $CF \parallel AB$

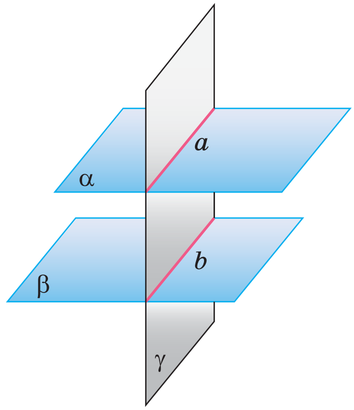
Рис. 73

5° Если плоскости α и β параллельны, то любая прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β.

В самом деле, по условию плоскости α и β не имеют общих точек. Поэтому любая прямая a, лежащая в плоскости α, не имеет общих точек с плоскостью β, т. е. $\alpha \parallel \beta$.

6° Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Пусть параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ по прямым a и b (рис. 74). Если предположить, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M, то точка M окажется общей точкой плоскостей α и β, что противоречит условию ($\alpha \parallel \beta$). Поэтому прямые a и b не имеют общих точек. Кроме того, они лежат в одной плоскости (в плоскости γ). Следовательно, $a \parallel b$.

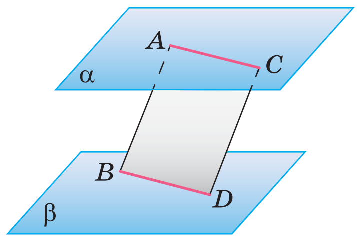


Если $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$

Рис. 74

7° Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Докажите это утверждение самостоятельно, используя рисунок 75.



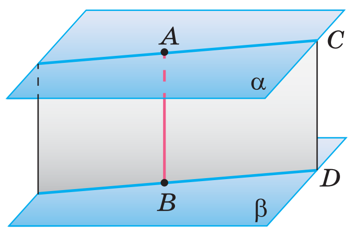
Если $\alpha \parallel \beta$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $AB = CD$

Рис. 75

8° Если плоскости α и β параллельны, то перпендикуляр, проведённый из произвольной точки плоскости α к плоскости β, перпендикулярен и к плоскости α.

Пусть AB — перпендикуляр, проведённый из точки A плоскости α к плоскости β: $AB \perp \beta$ (рис. 76). Докажем, что $AB \perp \alpha$, т. е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой AC плоскости α.

Плоскость ABC пересекается с плоскостью β по некоторой прямой BD, параллельной AC (согласно утверждению 6°). Поскольку $AB \perp \beta$, то $AB \perp BD$. Итак, $AB \perp BD$ и $AC \parallel BD$, поэтому $AB \perp AC$.



Если $\alpha \parallel \beta$ и $AB \perp \beta$, то $AB \perp \alpha$

Рис. 76

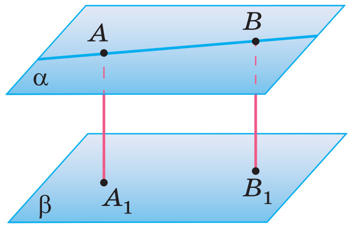
Наконец отметим ещё одно свойство параллельных плоскостей.

ТЕОРЕМА

Все точки одной из двух параллельных плоскостей равноудалены от другой плоскости.

Доказательство. Рассмотрим плоскость α, параллельную плоскости β, возьмём на ней произвольные точки A и B и проведём перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости β (рис. 77). Докажем, что $AA_1 = BB_1$.

Проведём прямую AB. Поскольку $\alpha \parallel \beta$, то $AB \parallel \beta$ (по утверждению 5°). Поэтому все точки прямой AB равноудалены от плоскости β (по теореме 3 п. 13), в частности $AA_1 = BB_1$.



Если $\alpha \parallel \beta$, $AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \beta$, то $AA_1 = BB_1$

Рис. 77

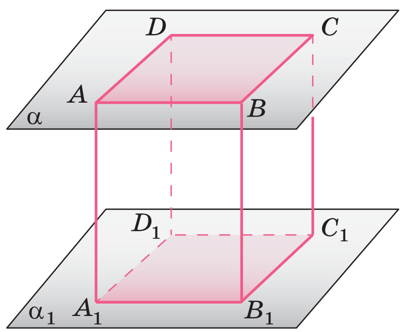
Докажем, что для параллельных плоскостей α и β все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α, на каком точки плоскости α находятся от плоскости β.

Возьмём, например, точку A_1 в плоскости β. Отрезок AA_1, перпендикулярный к плоскости β, перпендикулярен также и к плоскости α (по утверждению 8°). Поэтому длина отрезка AA_1 равна как расстоянию от точки A до плоскости β, так и расстоянию от точки A_1 до плоскости α, и, значит, эти расстояния равны.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется <u>расстоянием между параллельными плоскостями</u>.

15 Прямоугольный параллелепипед

Рассмотрим параллельные плоскости α и α_1 и прямоугольник $ABCD$, расположенный в плоскости α (рис. 78). Из вершин прямоугольника проведём перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 к плоскости α_1. Эти отрезки перпендикулярны также и к плоскости α (по утверждению 8° п. 14). Поэтому в четырёхугольниках ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1



$\alpha \parallel \alpha_1$, $ABCD$ – прямоугольник, $AA_1 \perp \alpha_1$, $BB_1 \perp \alpha_1$, $CC_1 \perp \alpha_1$, $DD_1 \perp \alpha_1$

Рис. 78

и DAA_1D_1 все углы прямые, и, следовательно, эти четырёхугольники — прямоугольники.

Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является прямоугольником. В самом деле, так как $AB \perp AA_1$, $AD \perp AA_1$ и также $A_1B_1 \perp AA_1$, $A_1D_1 \perp AA_1$, то углы BAD и $B_1A_1D_1$ являются линейными углами двугранного угла BAA_1D. Поэтому $\angle B_1A_1D_1 = \angle BAD = 90°$, т. е. угол A_1 четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ — прямой. Аналогично можно доказать, что и остальные углы этого четырёхугольника прямые, а значит, четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник.

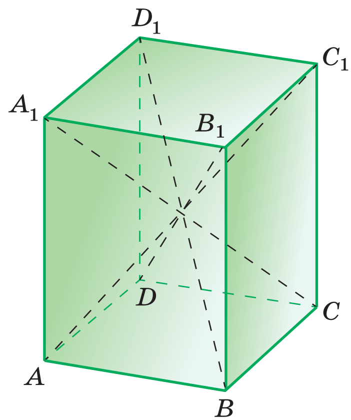
Будем рассматривать все шесть получившихся прямоугольников вместе с их внутренними областями. Фигура, составленная из шести прямоугольников, называется прямоугольным параллелепипедом и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

С предметами, имеющими форму прямоугольного параллелепипеда, мы встречаемся на каждом шагу: это всевозможные коробки, дома, комнаты и т. д.

Прямоугольники (вместе с их внутренними областями), из которых составлен прямоугольный параллелепипед, называются гранями, их стороны — рёбрами, а вершины — вершинами прямоугольного параллелепипеда. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными, а соединяющий их отрезок — диагональю прямоугольного параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 12 рёбер, 8 вершин и 4 диагонали (на рисунке 79 диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1). Две грани прямоугольного параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными.

Смежные грани прямоугольного параллелепипеда взаимно перпендикулярны.

Это следует из того, что линейные углы соответствующих двугранных углов — прямые.



Отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 — диагонали прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Рис. 79

Две грани прямоугольного параллелепипеда, не имеющие общих рёбер (например, грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 на рисунке 79), называются противоположными. Поскольку противоположные грани — прямоугольники с соответственно равными сторонами, а плоскости этих граней перпендикулярны к любому из соединяющих их рёбер, то

- **противоположные грани прямоугольного параллелепипеда равны, а их плоскости параллельны.**

Иногда выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани — боковыми гранями параллелепипеда. Рёбра параллелепипеда, по которым пересекаются боковые грани, называются боковыми рёбрами. Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми рёбрами будут отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Ясно, что

- **боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда равны друг другу и перпендикулярны к плоскостям оснований.**

Когда мы говорим о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, то обычно употребляем слова «длина», «ширина» и «высота», имея в виду длины трёх рёбер с общей вершиной. В геометрии эти три величины объединяются общим названием: измерения прямоугольного параллелепипеда. Так, у прямоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке 79, измерениями являются длины отрезков AB, AD и AA_1.

У прямоугольника два измерения — длина и ширина. При этом, как мы знаем,

- **квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.**

Оказывается, аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед.

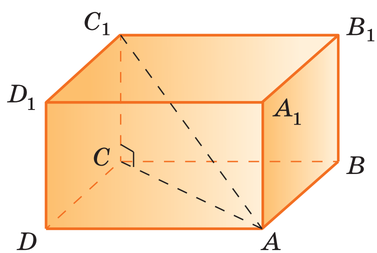
ТЕОРЕМА

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 80) и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Ребро CC_1 перпендикулярно к плоскости основания $ABCD$, поэтому $\angle ACC_1 = 90°$.



$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 =$$
$$= AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

Рис. 80

Из прямоугольного треугольника ACC_1 находим:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Отрезок AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Учитывая, что $CC_1 = BB_1 = AA_1$, получаем

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

СЛЕДСТВИЕ

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

2

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом. Все грани куба — равные друг другу квадраты.

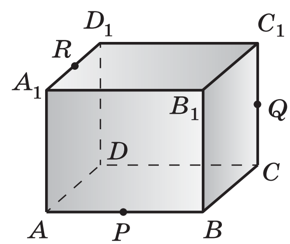
При решении задач, связанных с прямоугольным параллелепипедом, иногда возникает необходимость построения на рисунке изображения сечения параллелепипеда заданной плоскостью. Как и в аналогичных задачах, связанных с тетраэдром, будем для краткости говорить «построение сечения» вместо «построение на рисунке изображения сечения».

В случае прямоугольного параллелепипеда при построении сечения нужно использовать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две его противоположные грани по некоторым отрезкам, то эти отрезки параллельны (согласно утверждению 6° п. 14).

Рассмотрим пример задачи на построение сечения прямоугольного параллелепипеда.

Задача

На рисунке 81 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P, Q и R — середины рёбер AB, CC_1 и A_1D_1. Построить сечение данного параллелепипеда плоскостью PQR.



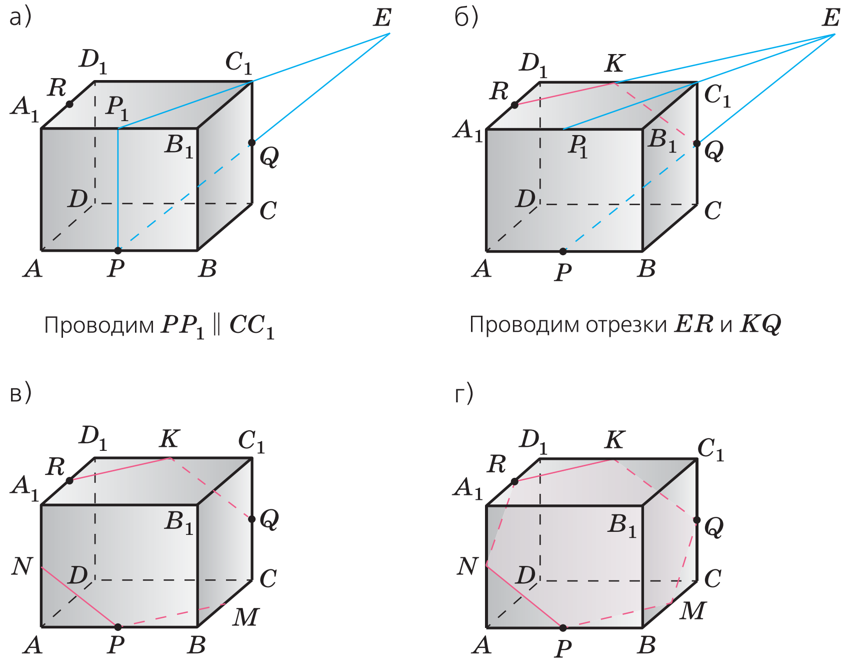
Точки P, Q и R — середины рёбер AB, CC_1 и A_1D_1

Рис. 81

Решение

1) Сначала построим точку пересечения прямой PQ с плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$. С этой целью проведём отрезок $PP_1 \parallel CC_1$, $P_1 \in A_1B_1$ (рис. 82, *а*). Прямые PQ и P_1C_1 лежат в одной плоскости (эта плоскость проходит через параллельные прямые PP_1 и CC_1).

Проведём прямые PQ и P_1C_1 и обозначим буквой E точку их пересечения. Так как прямая P_1C_1 лежит в плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$, то точка E является точкой пересечения прямой PQ с плоскостью этой грани. При этом точка E, как и вся прямая PQ, лежит в секущей плоскости PQR.



а) Проводим $PP_1 \parallel CC_1$

б) Проводим отрезки ER и KQ

в) Проводим отрезки $PM \parallel RK$ и $PN \parallel QK$

г) Проводим отрезки MQ и NR. Шестиугольник $PMQKRN$ – искомое сечение

Рис. 82

2) Проведём отрезок ER и обозначим буквой K точку пересечения отрезков ER и C_1D_1 (рис. 82, *б*). Таким образом, мы построили отрезок KR, по которому секущая плоскость PQR пересекается с гранью $A_1B_1C_1D_1$.

Проведём также отрезок KQ. По этому отрезку плоскость PQR пересекается с гранью CDD_1C_1.

3) Далее воспользуемся тем, что секущая плоскость пересекает противоположные грани параллелепипеда по параллельным отрезкам.

Через точку P проведём отрезки PM и PN, параллельные соответственно отрезкам RK и QK (рис. 82, *в*). По отрезкам PM и PN секущая плоскость PQR пересекается с гранями $ABCD$ и AA_1B_1B.

4) Наконец, проведём отрезки MQ и NR и получим искомое сечение — шестиугольник $PMQKRN$ (рис. 82, *г*).

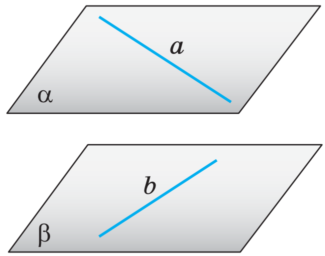
Проследив ещё раз за всеми этапами построения, нетрудно доказать (сделайте это), что построенные точки K, M и N являются серединами рёбер C_1D_1, BC и AA_1. ▲

16 Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми

Рассмотрим скрещивающиеся прямые a и b. Через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой (см. п. 13). Обозначим эти плоскости буквами α и β (рис. 83). Плоскости α и β параллельны (согласно утверждению 4° п. 14). С помощью этих плоскостей введём понятие расстояния между скрещивающимися прямыми.

Определение

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, каждая из которых проходит через одну из этих прямых параллельно другой прямой.



a и b — скрещивающиеся прямые, $\alpha \parallel \beta$

Рис. 83

Согласно данному определению расстояние между скрещивающимися прямыми a и b, изображёнными на рисунке 83, — это расстояние между параллельными плоскостями α и β. Можно сказать также, что это есть расстояние между прямой a и параллельной ей плоскостью β, проходящей через прямую b, и также это есть расстояние между прямой b и параллельной ей плоскостью α.

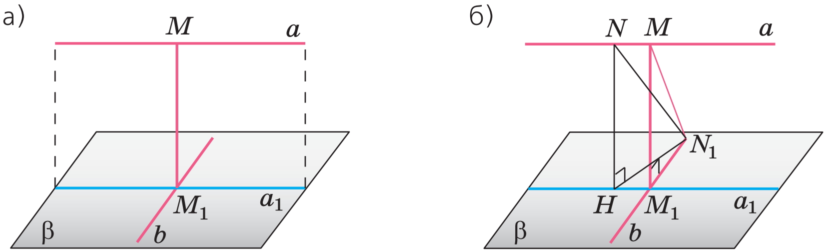
Поставим такой вопрос: а есть ли на скрещивающихся прямых такие две точки (по одной на каждой прямой), расстояние между которыми равно расстоянию между этими прямыми? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема:

ТЕОРЕМА

На двух данных скрещивающихся прямых a и b имеются такие две точки (по одной на каждой прямой), расстояние между которыми равно расстоянию между этими прямыми.

∗ Доказательство. Обозначим через a_1 ортогональную проекцию прямой a на плоскость β (рис. 84, *а*). Поскольку прямая a не перпендикулярна к плоскости β, то её проекцией на эту плоскость является прямая (согласно утверждению о проекции прямой на плоскость, см. с. 40).

Прямые a и a_1 лежат в одной плоскости и не пересекаются (так как $\alpha \parallel \beta$), т. е. $a \parallel a_1$. Прямые b и a_1 также лежат в одной плоскости (в плоскости β) и пересекаются в некоторой точке M_1 (если допустить, что $b \parallel a_1$, то получится, что $b \parallel a$, поскольку $a_1 \parallel a$, но это не так).



Прямая a_1 — ортогональная проекция прямой a на плоскость β

Отрезок MM_1 — общий перпендикуляр к прямым a и b. $NN_1 > MM_1$

Рис. 84

Точка M_1 является ортогональной проекцией на плоскость β некоторой точки M прямой a. Так как $MM_1 \perp \beta$, то длина отрезка MM_1 равна расстоянию между параллельными прямой a и плоскостью β, т. е. равна расстоянию между скрещивающимися прямыми a и b.

Итак, на прямых a и b имеются такие точки M и M_1, расстояние между которыми равно расстоянию между этими скрещивающимися прямыми. *

Отметим, что так как $MM_1 \perp \beta$, то $MM_1 \perp b$ и $MM_1 \perp a_1$, а поскольку $a \parallel a_1$, то $MM_1 \perp a$. Таким образом, отрезок MM_1 с концами на скрещивающихся прямых a и b является общим перпендикуляром к этим прямым.

Возьмём теперь на прямых a и b какие-нибудь точки N и N_1, из которых хотя бы одна отличается соответственно от точек M и M_1 (рис. 84, *б*), и докажем, что $NN_1 > MM_1$.

Если точка N совпадает с точкой M, а точка N_1 отлична от точки M_1, то $NN_1 = MN_1 > MM_1$ (гипотенуза MN_1 прямоугольного треугольника MN_1M_1 больше катета MM_1). И точно так же если точка N_1 совпадает с точкой M_1, а точка N отлична от точки M, то $NN_1 = NM_1 > MM_1$.

Если точка N отлична от точки M и точка N_1 отлична от точки M_1, то проведём перпендикуляр NH к плоскости β. Точка H является проекцией точки N на плоскость β, поэтому $H \in a_1$, и, следовательно, точка H отлична от точки N_1. Так как $NH = MM_1$ и $NN_1 > NH$ (гипотенуза NN_1 прямоугольного треугольника NHN_1 больше катета NH), то $NN_1 > MM_1$.

Приведённое доказательство позволяет сделать вывод:

- **расстояние между скрещивающимися прямыми равно наименьшему расстоянию между двумя точками этих прямых.**

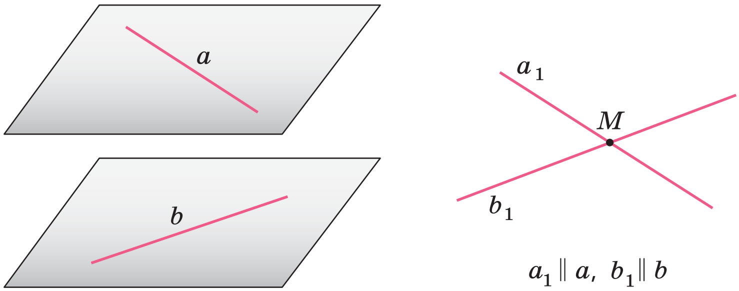


Рис. 85

Введём теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Обратимся к рисунку 85, на котором a и b — данные скрещивающиеся прямые, а M — произвольная точка пространства, через которую проведены прямая a_1, параллельная прямой a, и прямая b_1, параллельная прямой b. Если угол между прямыми a_1 и b_1 равен φ (напомним, что угол φ между пересекающимися прямыми удовлетворяет неравенствам $0 < \varphi \leqslant 90°$, см. п. 6), то будем говорить, что угол между скрещивающимися прямыми a и b равен φ. В частности, если $\varphi = 90°$, то скрещивающиеся прямые называются взаимно перпендикулярными.

Можно доказать, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M, через которую проведены прямые, соответственно параллельные скрещивающимся прямым. С точки зрения наглядности это утверждение достаточно очевидно, а строгое доказательство мы приведём позднее, в п. 51. Отметим также, что при решении задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми нередко удобно взять точку M на одной из скрещивающихся прямых. Например, если на рисунке 85 взять точку M на прямой a, то роль прямой a_1 будет играть сама прямая a.

Вопросы и задачи

17. а) Прямые AB и CD параллельны, прямая AM, не совпадающая с прямой AB, не имеет общих точек с прямой CD. Лежит ли точка M в плоскости ABC? Ответ обоснуйте.

б) Две прямые AB и AC не имеют общих точек с прямой a. Докажите, что хотя бы одна из прямых AB и AC и прямая a являются скрещивающимися.

в) Докажите, что прямые, содержащие противоположные рёбра тетраэдра, являются скрещивающимися.

г) Прямые a и b параллельны, прямые a и c — скрещивающиеся. Могут ли прямые b и c пересекаться?

д)* Прямые AB и A_1B_1 — скрещивающиеся, точки C и D — середины отрезков AB и A_1B_1. Выясните, каково взаимное расположение прямых AA_1 и CD.

е)* Плоскость пересекает каждую из граней двугранного угла, но не имеет общих точек с его ребром. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с гранями двугранного угла параллельны.

18. а) Точки K, L и M — середины рёбер AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$. Выясните, каково взаимное расположение прямых KL и AB, KC и AB, ML и AD.

б) Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD также скрещивающиеся.

в) Докажите, что прямая, проходящая через середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, и прямая AC являются скрещивающимися.

г) Прямые a и b параллельны, прямые a и c — скрещивающиеся. Могут ли прямые b и c лежать в одной плоскости?

д)* Прямые AB и A_1B_1 — скрещивающиеся, точки C и D — середины отрезков AA_1 и BB_1. Выясните, каково взаимное расположение прямых AB и CD.

е)* Верно ли, что через данную точку всегда можно провести прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых? Ответ обоснуйте.

19. а) Ребро AD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC. Через точку B проведена прямая BK, параллельная прямой AD. Найдите KA и KC, если $AB = 3$, $BC = BK = 4$.

б) Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b, параллельная прямой a, не лежит в этой плоскости. Через точку A плоскости α проведена прямая AB, параллельная прямой b. Докажите, что $B \in \alpha$.

в) Докажите, что середины рёбер AB, AC, CD и BD тетраэдра $ABCD$ являются вершинами параллелограмма (рис. 86).

г) Точки K, L, M и N — середины рёбер AB, AC, CD и DB тетраэдра $ABCD$. Докажите, что если $AD = BC$, то $KM \perp LN$ (рис. 87).

д)* Точки K, L и M — середины рёбер AB, AC и CD тетраэдра $ABCD$, ребро AD лежит в плоскости, перпендикулярной к прямой BC. Докажите, что $KL \perp LM$.

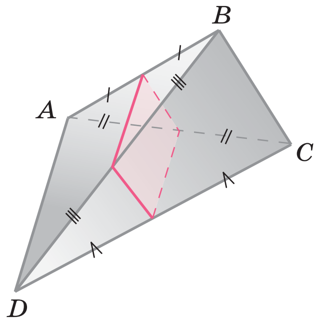


Рис. 86

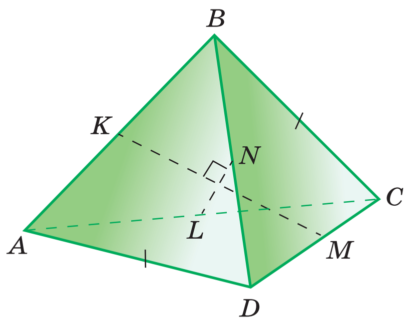


Рис. 87

20. а) Прямая MA перпендикулярна к плоскости ромба $ABCD$, прямая NC параллельна прямой MA. Докажите, что для любой точки K прямой NC выполняется равенство $KB = KD$.

б) Прямые a и b параллельны, прямые a и c — скрещивающиеся, прямые b и c не имеют общих точек. Докажите, что прямые b и c скрещивающиеся.

в) Докажите, что три бимедианы тетраэдра имеют общую середину (рис. 88).

г) Точки K, L, M и N — середины рёбер AB, AC, CD и DB тетраэдра $ABCD$. Докажите, что если $KM \perp LN$, то $AD = BC$ (см. рис. 87).

д)* Точки K, L и M — середины рёбер AB, AC и CD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что если $KL \perp LM$, то ребро AD лежит в плоскости, перпендикулярной к прямой BC.

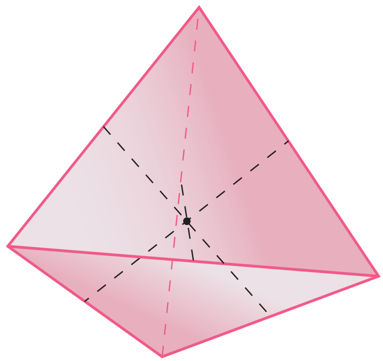


Рис. 88

2

21. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Верно ли, что медианы треугольника $A_1B_1C_1$ являются параллельными проекциями медиан треугольника ABC? Ответ обоснуйте.

б) Дан треугольник $A_1B_1C_1$, являющийся параллельной проекцией треугольника ABC. Постройте параллельную проекцию точки пересечения медиан треугольника ABC.

в) Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Верно ли, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ являются параллельными проекциями биссектрис треугольника ABC? Ответ обоснуйте.

г)* Дан треугольник $A_1B_1C_1$, являющийся параллельной проекцией треугольника ABC, в котором $AB = 2$, $AC = 3$. Постройте параллельную проекцию биссектрисы AM треугольника ABC.

д)* Дан треугольник $A_1B_1C_1$, являющийся параллельной проекцией треугольника ABC, в котором $AB = BC = 2$, $AC = 3$. Постройте параллельную проекцию центра окружности, вписанной в треугольник ABC.

е)* Дан треугольник, являющийся параллельной проекцией прямоугольного треугольника ABC, у которого угол A равен 60°. Постройте параллельную проекцию биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины A.

ж)* Диагональ AC ромба $ABCD$ лежит в плоскости α, $AB = 2a$, $\angle BAD = 60°$, расстояние от точки B до плоскости α равно h $(h < a)$. Найдите площадь ортогональной проекции ромба на плоскость α.

22. а) Параллельной проекцией трапеции является четырёхугольник. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция.

б) Даны точки A_1, B_1 и C_1, не лежащие на одной прямой и являющиеся параллельными проекциями вершин A, B и C трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$. Постройте параллельную проекцию вершины D.

в) Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Верно ли, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ являются параллельными проекциями высот треугольника ABC? Ответ обоснуйте.

г)* Даны точки A_1, B_1 и C_1, не лежащие на одной прямой и являющиеся параллельными проекциями вершин A, B и C прямоугольного треугольника ABC, катеты AC и BC которого равны 3 и 4. Постройте параллельную проекцию высоты CH этого треугольника.

д)* Даны точки A_1, B_1 и C_1, не лежащие на одной прямой и являющиеся параллельными проекциями вершин A, B и C параллелограмма $ABCD$. Точка M — середина стороны AD, отрезок CM пересекает диагональ BD в точке N. Постройте параллельную проекцию точки N.

е)* Даны четыре точки, не лежащие на одной прямой и являющиеся параллельными проекциями вершин ромба $ABCD$, острый угол A которого равен 45°. Постройте параллельную проекцию высоты ромба, проведённой из вершины B к стороне AD.

ж)* Диагональ AC трапеции $ABCD$ с основанием AD лежит в плоскости α, расстояние от точки D до плоскости α равно $\sqrt{3}$. Найдите площадь ортогональной проекции трапеции на плоскость α, если $AC = AD = CD = 4$, $BC = 1$.

23. а) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM : MB = DN : NC$. Плоскость α пересекает плоскость ABC по прямой MN. Докажите, что $BC \parallel \alpha$.

б) Прямая a параллельна плоскости α, точка M лежит в плоскости α. Докажите, что прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a, лежит в плоскости α.

в) Докажите, что прямая, проходящая через середины двух боковых рёбер тетраэдра, параллельна плоскости основания.

г) Параллельные прямые a и b расположены соответственно в плоскостях α и β, пересекающихся по прямой c, отличной от прямых a и b. Докажите, что прямая c параллельна каждой из прямых a и b.

д) Найдите расстояние от прямой, проходящей через середины двух боковых рёбер тетраэдра, до плоскости основания, если высота тетраэдра, проведённая к основанию, равна 8 см.

е) Изобразите тетраэдр $ABCD$, отметьте точки M и N — середины рёбер AB и AC и постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую MN параллельно прямой AD.

ж)* Одна из вершин треугольника лежит в плоскости α, а одна из его сторон параллельна этой плоскости и удалена от неё на 6 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до плоскости α.

з)* Вершины A и B параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до плоскости α равно 6 см, а ортогональные проекции диагоналей на плоскость α равны 20 см и 22 см. Найдите AD, если $AB = 19$ см.

и)* Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости ABC.

к)* Прямые a, b и c попарно скрещиваются и не параллельны одной плоскости. Докажите, что существует прямая, пересекающая прямые a и b и параллельная прямой c.

24. а) Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает стороны AC и BC треугольника ABC в точках M и N. Найдите отношение $CN : NB$, если $AM : MC = 3 : 4$.

б) Прямая a параллельна плоскости α, прямая b параллельна прямой a. Докажите, что прямая b либо лежит в плоскости α, либо параллельна плоскости α.

в) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB, AC и CD тетраэдра $ABCD$, параллельна прямым BC и AD.

г) Прямые AB и CD параллельны, точка M не лежит в плоскости ABC. Докажите, что линия пересечения плоскостей ABM и CDM параллельна прямой AB.

д) Ребро AD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки D до плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC и CD, если высота AH треугольника ABC равна 10 см.

е) Изобразите тетраэдр $ABCD$, отметьте точки P и Q — середины рёбер AB и CD и постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой BC.

ж)* Одна из сторон четырёхугольника лежит в плоскости α, а другая, вдвое меньшая первой, параллельна плоскости α и удалена от этой плоскости на 12 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника до плоскости α.

з)* Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, вершина A которого лежит в плоскости α, а сторона BC параллельна этой плоскости и удалена от неё на 3 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости α, если $AB = 5$ см, $BC = 1$ см.

и)* Медианы грани ABD тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке M, а медианы грани BCD пересекаются в точке N. Докажите, что расстояние между прямой MN и плоскостью ABC втрое меньше расстояния от точки D до плоскости ABC.

к)* Прямые a, b и c попарно скрещиваются и параллельны одной плоскости. Докажите, что не существует прямой, пересекающей прямые a и b и параллельной прямой c.

25. а) Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены прямые AE и CF, перпендикулярные к плоскости параллелограмма. Докажите, что плоскости AED и BCF параллельны.

б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины трёх боковых рёбер тетраэдра, параллельна плоскости основания.

в) Две прямые AB и AC параллельны плоскости α. Докажите, что прямая BC также параллельна этой плоскости.

г) Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной.

д) Плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей. Пересекает ли она другую плоскость? Ответ обоснуйте.

е) Докажите, что две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.

ж)* Найдите расстояние между плоскостью, проходящей через середины трёх боковых рёбер тетраэдра, и плоскостью основания, если высота тетраэдра, проведённая к основанию, равна 10 см.

з)* Через точку M, удалённую от плоскости α на 15 см, проведены две прямые. Первая прямая пересекает плоскость α в точке A, а параллельную ей плоскость β — в точке B; вторая прямая пересекает плоскость α в точке C, а плоскость β — в точке D. Найдите расстояние между плоскостями α и β и выясните, как расположены точки A и B по отношению к точке M, если $AB = 16$ см, $CM = 25$ см и $AM = CD$.

и)* Точки A, B, C, D, E и F не лежат в одной плоскости, $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что плоскости ABC и DEF параллельны.

2

26. а) Через вершины A и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведены прямые AM и CN, перпендикулярные к плоскости трапеции. Докажите, что плоскости ADM и BCN параллельны, а плоскости ABM и CDN пересекаются.

б) Докажите, что плоскость, проходящая через точки пересечения медиан трёх боковых граней тетраэдра, параллельна плоскости основания.

в) Две прямые, содержащие смежные стороны параллелограмма, параллельны плоскости α. Докажите, что прямые, содержащие диагонали параллелограмма, также параллельны этой плоскости.

г) Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит только одна плоскость, параллельная данной.

д) Прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей. Пересекает ли она другую плоскость? Ответ обоснуйте.

е) Докажите, что три параллельные плоскости, пересекающие каждую из двух прямых, отсекают на этих прямых отрезки так, что два отрезка одной прямой пропорциональны двум отрезкам другой прямой.

ж)* Найдите расстояние между плоскостью, проходящей через точки пересечения медиан трёх боковых граней тетраэдра, и плоскостью основания, если высота тетраэдра, проведённая к основанию, равна 9 см.

з)* Через точку M, удалённую от плоскости α на 6 см, проведены две прямые. Первая прямая пересекает плоскость α в точке A, а параллельную ей плоскость β — в точке B; вторая прямая пересекает плоскость α в точке C, а плоскость β — в точке D. Найдите расстояние между плоскостями α и β

и выясните, как расположены точки A и M по отношению к точке B, если $BM = 48$ см, $CM = 27$ см и $AM = DM$.

и)* Точки A, B, C, D, E и F не лежат в одной плоскости, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel AF$. Докажите, что $AF = CD$.

27. а) Докажите, что прямые AA_1 и C_1D_1, а также прямые AA_1 и B_1D, проходящие через вершины прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являются скрещивающимися.

б) Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ABC_1, если $AB = 2$ см, $AD = 3$ см и $AA_1 = 4$ см.

в) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости A_1BD и B_1CD_1 параллельны.

г) Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AC и середину ребра A_1B_1. Найдите площадь этого сечения, если $AB = AA_1 = 4$ см, $BC = 12$ см.

д) Боковое ребро и диагональ прямоугольного параллелепипеда равны 12 см и 17 см, площадь его основания равна 72 см^2. Найдите стороны основания.

е)* Точки M и N — середины рёбер AD и AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — точка пересечения диагоналей грани CC_1D_1D. Докажите, что прямая ON перпендикулярна к плоскости BB_1M.

ж)* Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер A_1B_1, CC_1 и AD, и найдите площадь сечения, если ребро куба равно 2 см.

з)* На рёбрах AB, BB_1 и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки M, N и P так, что $AM = \frac{1}{3}AB$, $BN = NB_1$, $C_1P = PD_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNP.

и)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На продолжении ребра A_1B_1 за точку A_1 отмечена точка K, а на рёбрах BB_1 и BC отмечены точки L и M так, что $A_1K = \frac{1}{2}A_1B_1$, $BL = \frac{1}{4}BB_1$ и $BM = \frac{1}{3}BC$. Докажите, что плоскость KLM проходит через вершину D параллелепипеда, постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью и ответьте на вопрос: какой многоугольник получился в сечении?

к)* Точки P и Q – середины рёбер AA_1 и CD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через прямую PQ и параллельна прямой BD_1. Докажите, что плоскость α проходит через середины рёбер AB и DD_1, постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью и ответьте на вопрос: какой многоугольник получился в сечении?

л)* Через вершину B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α, перпендикулярная к прямой BD_1. Докажите, что плоскость α проходит через центр грани $ABCD$, постройте сечение куба этой плоскостью и ответьте на вопрос: какой многоугольник получился в сечении?

28. а) Докажите, что прямые AD и C_1D_1, а также прямые A_1D и D_1C, проходящие через вершины прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являются скрещивающимися.

б) Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ABM, где точка M — середина ребра B_1C_1, если $AB = 4$ см, $AD = 8$ см и $AA_1 = 3$ см.

в) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина отрезка AD_1. Докажите, что прямая CM параллельна плоскости A_1BC_1.

г) Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной прямой AA_1 и проходящей через точку C_1 и середину ребра AD. Найдите площадь этого сечения, если $AB = 3$ см, $BC = 8$ см и $AA_1 = 5$ см.

2

д) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, его боковое ребро больше каждой из сторон основания, площадь основания равна 12 см^2, а площадь сечения плоскостью, проходящей через два боковых ребра, равна 60 см^2. Найдите измерения этого параллелепипеда.

е)* Точка M — середина ребра AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — точка пересечения диагоналей грани CC_1D_1D, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см. На ребре AD на расстоянии 1 см от точки A отмечена точка N. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости BB_1N.

ж)* Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AD и CD и середину диагонали AC_1. Найдите площадь этого сечения, если $AC_1 = 2$ см.

з)* На рёбрах AA_1, BC и CD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки M, N и P так, что $AM = MA_1$, $BN = NC$ и $CP = 2PD$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNP.

и)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На продолжении отрезка AC за точку C отмечена точка K, а на рёбрах AA_1 и DD_1 отмечены точки L и M так, что $CK = \frac{1}{2}AC$, $AL = \frac{1}{3}LA_1$ и $DM = MD_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью KLM и ответьте на вопрос: сколько рёбер и сколько граней параллелепипеда пересекает плоскость KLM?

к)* Точки M и K — середины рёбер AB и BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую AK проведена плоскость, параллельная прямой D_1M. Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью и ответьте на вопрос: какой многоугольник получился в сечении?

л)* Через вершину D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α, перпендикулярная к прямой, проходящей через вершину B_1 и центр грани $ABCD$. Докажите, что плоскость α проходит через вершину B, постройте сечение куба плоскостью α и ответьте на вопрос: какой многоугольник получился в сечении?

29. а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно AA_1.
б) Точки M и N — середины рёбер AD и BD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что расстояние между прямыми MN и AC вдвое меньше высоты DH этого тетраэдра.
в) Каждое ребро тетраэдра $ABCD$ равно $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между прямыми AD и BC.
г) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = BC = 2$ и $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.
д) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми DD_1 и AC.
е) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AC и B_1D_1.
ж)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если $AB = AA_1$, то прямые AC_1 и A_1B перпендикулярны.
з)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если $AB_1 = AD_1$, то прямые A_1C и BD перпендикулярны.
и)* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через точки A_1 и D и параллельна прямой AB_1, а плоскость β проходит через точки B_1 и C и параллельна прямой C_1D. Постройте сечения куба плоскостями α и β, докажите, что эти плоскости параллельны, и сравните расстояние между ними с расстоянием между скрещивающимися прямыми AB_1 и A_1D.

2

30. а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно AA_1.
б) Точки L, M и N — середины рёбер AB, AD и BD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что расстояние между прямыми MN и CL вдвое меньше высоты DH этого тетраэдра.
в) Двугранный угол $ABCD$ равен 90°. Найдите расстояние между прямыми AD и BC, если $AB = AC = 5$, $BC = 8$ и $BD = CD = 4\sqrt{2}$.
г) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 4$ и $BC = 3$. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.
д) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N — середины рёбер AB и AD. Найдите угол между прямыми MN и DD_1.
е) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AC и BC_1.
ж)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если прямые AC_1 и A_1B перпендикулярны, то $AB = AA_1$.
з)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если прямые A_1C и BD перпендикулярны, то $AB_1 = AD_1$.
и)* Точки M и K — середины рёбер AD и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через точки A_1 и B и параллельна прямой B_1K, а плоскость β проходит через точки B_1 и D и параллельна прямой BM. Постройте сечения куба плоскостями α и β, докажите, что эти плоскости параллельны, и сравните расстояние между ними с расстоянием между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1D.

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте аксиомы стереометрии, связанные со взаимным расположением точек, прямых и плоскостей в пространстве.
2. Объясните, что означают слова «две плоскости пересекаются». Что такое линия пересечения двух плоскостей?
3. Докажите, что в пространстве через две точки проходит прямая, и притом только одна.
4. Докажите, что если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

2

5. Что означают слова «прямая и плоскость пересекаются»?
6. Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.
7. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
8. Докажите, что через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.
9. Какая прямая называется перпендикулярной к данной плоскости?
10. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной плоскости.
11. Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре к плоскости.
12. Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости, меньше любого другого отрезка, соединяющего эту точку с какой-либо точкой плоскости.
13. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
14. Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведённой из точки к плоскости. Какая точка называется основанием наклонной? Какой отрезок называется проекцией наклонной?
15. Сформулируйте и докажите теорему о трёх перпендикулярах.
16. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Докажите, что через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

18*. Докажите, что две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, лежат в одной плоскости.

19. Что называется ортогональной проекцией точки (фигуры) на плоскость?

20*. Докажите, что если прямая не перпендикулярна к плоскости, то её проекцией на эту плоскость является прямая.

21. Что называется углом между: а) пересекающимися прямыми; б) прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую?

22. Объясните, какая фигура называется тетраэдром.

23. Объясните, что такое грани, рёбра, плоские углы и вершины тетраэдра. Сколько граней, рёбер и вершин имеет каждый тетраэдр? Какие рёбра тетраэдра называются противоположными?

24. Объясните, что такое основание, боковые грани, боковые рёбра и высота тетраэдра.

25. Объясните, что такое развёртка тетраэдра.

26. Что такое секущая плоскость и сечение фигуры? Что представляет собой сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер?

27. Какая фигура называется двугранным углом? Что такое ребро и грани двугранного угла?

28. Объясните, какой угол называется линейным углом двугранного угла. Сколько линейных углов имеет двугранный угол?

29. Докажите, что все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

30. Что называется градусной мерой двугранного угла? Какой двугранный угол называется прямым, какой — острым, а какой — тупым?

31. Объясните, что называется углом между пересекающимися плоскостями. Может ли угол между пересекающимися плоскостями быть равен 30°? 90°? 120°?

32. Какие плоскости называются перпендикулярными?

33. Докажите, что если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

34. Дайте определение параллельных прямых в пространстве.

35. Докажите, что через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

36. Дайте определение скрещивающихся прямых.

37. Сформулируйте и докажите утверждение, выражающее признак скрещивающихся прямых.

38. Докажите, что если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

39. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

40. Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

41. Докажите, что через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к этой плоскости, и притом только одна.

42. Что называется параллельной проекцией точки на плоскость? параллельной проекцией фигуры на плоскость?

2

43. Докажите, что при проектировании на плоскость параллельно прямой l проекцией прямой, не параллельной прямой l и не совпадающей с ней, является прямая.

44. Докажите, что параллельные проекции отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам.

45. Что представляет собой параллельная проекция на плоскость двух пересекающихся прямых?

46. Что представляет собой параллельная проекция на плоскость двух параллельных прямых?

47. Докажите, что параллельные проекции параллельных отрезков пропорциональны самим отрезкам.

48. Сформулируйте и докажите* теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.

49. Дайте определение параллельных прямой и плоскости.

50. Докажите, что если прямая лежит в одной из двух пересекающихся плоскостей и параллельна другой плоскости, то она параллельна линии пересечения этих плоскостей.

51. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую признак параллельности прямой и плоскости.

52. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

53. Докажите, что все точки прямой, параллельной плоскости, равноудалены от этой плоскости.

54. Что называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью?

55. Дайте определение параллельных плоскостей.

56. Докажите, что если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.

57. Докажите, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

58. Докажите, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

59. Докажите, что если через каждую из скрещивающихся прямых проведена плоскость, параллельная другой прямой, то эти плоскости параллельны.

60. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то любая прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β.

61. Докажите, что если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

62. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

63. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то перпендикуляр, проведённый из произвольной точки плоскости α к плоскости β, перпендикулярен и к плоскости α.

64. Докажите, что все точки одной из двух параллельных плоскостей равноудалены от другой плоскости.

65. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α, на каком точки плоскости α находятся от плоскости β. Что называется расстоянием между двумя параллельными плоскостями?

66. Объясните, какая фигура называется прямоугольным параллелепипедом. Что такое грани, рёбра, противоположные вершины и диагональ прямоугольного параллелепипеда? Сколько граней, рёбер, вершин и диагоналей имеет параллелепипед?

67. Какие грани прямоугольного параллелепипеда называются смежными? Каким свойством обладают смежные грани прямоугольного параллелепипеда?

68. Какие грани прямоугольного параллелепипеда называются противоположными? Каким свойством обладают противоположные грани прямоугольного параллелепипеда?

69. Объясните, что такое основания, боковые грани и боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда. Каким свойством обладают боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда?

70. Объясните, что такое измерения прямоугольного параллелепипеда. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

71. Какой прямоугольный параллелепипед называется кубом? Что представляют собой грани куба?

72. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

73*. Докажите, что на скрещивающихся прямых имеются такие две точки (по одной на каждой прямой), расстояние между которыми равно расстоянию между этими прямыми.

74. Объясните, какой отрезок называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым. Как связана его длина с расстоянием между скрещивающимися прямыми?

2

75*. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно наименьшему расстоянию между двумя точками этих прямых.

76. Объясните, что называется углом между скрещивающимися прямыми.

? Дополнительные задачи

§ 1

31. Докажите, что если любые четыре из данных нескольких точек лежат в одной плоскости, то все данные точки лежат в одной плоскости.

32. В пространстве дано несколько прямых, любые две из которых пересекаются. Докажите, что: а) если все точки пересечения различны, то эти прямые лежат в одной плоскости; б) если нет такой точки, через которую проходят все прямые, то они лежат в одной плоскости.

33. Отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости α, Φ — произвольное множество точек плоскости α. а) Докажите, что если точка M из множества Φ является ближайшей к точке A, то точка M является ближайшей и к точке H, и обратно. б) Проведите доказательство теоремы о трёх перпендикулярах, основанное на утверждении задачи а.

34. Найдите множество оснований перпендикуляров, проведённых из точки A ко всем прямым, лежащим в плоскости α, не содержащей точку A, и проходящим через точку B.

35. Докажите, что множеством оснований наклонных одной и той же длины, проведённых из данной точки к данной плоскости, является окружность, центром которой служит основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к той же плоскости.

36. Три прямые OA, OB и OC лежат в плоскости α, а точка D не лежит в этой плоскости, причём $\angle DOA = \angle DOB = \angle DOC$. Докажите, что прямая OD перпендикулярна к плоскости α.

37. Отрезки MH и MA — перпендикуляр и наклонная, проведённые из точки M к плоскости α, точка B лежит в плоскости α, но не лежит на прямой AH. Докажите, что $\angle MAH < \angle MAB$.

38. Каждая из шести плоскостей проходит через ребро и середину противоположного ребра тетраэдра. На сколько частей эти плоскости разделяют тетраэдр?

39. Точки M, N и K являются точками пересечения медиан боковых граней тетраэдра. Найдите площадь треугольника MNK, если площадь основания тетраэдра равна 36 см^2.

40. Точки пересечения медиан граней данного тетраэдра соединены отрезками. Докажите, что каждое ребро получившегося тетраэдра в 3 раза меньше соответствующего ребра данного тетраэдра.

2

41. а) Докажите, что все грани тетраэдра равны друг другу (такой тетраэдр называется равногранным) тогда и только тогда, когда противоположные рёбра тетраэдра равны друг другу.
б) Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда сумма трёх плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна 180°.

42. Все боковые грани тетраэдра $ABCD$ — равные равнобедренные треугольники с углом при основании 80°. На боковых рёбрах DB и DC отмечены точки P и Q. Докажите, что периметр треугольника APQ не меньше длины бокового ребра.

43. Все плоские углы при вершине O тетраэдра $OABC$ — прямые. Найдите множество всех точек этого тетраэдра, каждая из которых равноудалена от вершин A и O.

44. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ — прямые, отрезок DH — высота тетраэдра. Докажите, что точка H является ортоцентром треугольника ABC.

45. Докажите, что множество всех точек, лежащих внутри тетраэдра $OABC$ или на его гранях и равноудалённых от плоскостей OAB, OBC и OCA, представляет собой отрезок (он называется биссектрисой тетраэдра).

46. Докажите, что четыре биссектрисы тетраэдра пересекаются в одной точке.

47. Найдите косинус двугранного угла тетраэдра, все рёбра которого равны друг другу.

48. Плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые. Докажите, что

$$S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{BCD} + S^2_{CAD}.$$

49. Изобразите ортогональную проекцию тетраэдра $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную к прямой, проходящей через середины рёбер AB и CD. Докажите, что эта проекция — параллелограмм вместе с его внутренней областью.

50. Плоскость, проходящая через середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, пересекает рёбра AD и BC в точках L и N. Докажите, что $BC : CN = AD : DL$.

51. Какую наибольшую площадь может иметь ортогональная проекция тетраэдра, каждое ребро которого равно 1?

§ 2

2

52. Сколько существует плоскостей, каждая из которых равноудалена от всех вершин данного тетраэдра?

53. Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость, параллельную плоскости ABC, точки E, F и G — середины сторон AB, BC и CA. Докажите, что прямые A_1F, B_1G и C_1E пересекаются в одной точке.

54. Докажите, что параллельная проекция данного угла может быть углом любой заданной величины.

55. Точки L и M — середины рёбер CD и A_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки N и O — середины отрезков CD_1 и A_1D. Докажите, что отрезки LM и NO пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

56. Диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекает плоскость A_1BD в точке M. Найдите отношение $AM : AC_1$.

57. Укажите какие-нибудь четыре вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являющиеся вершинами тетраэдра, все рёбра которого равны друг другу.

58. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C, проходящими через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

59. Изобразите ортогональную проекцию куба на плоскость, перпендикулярную к диагонали грани куба.

60. Изобразите ортогональную проекцию куба на плоскость, перпендикулярную к его диагонали. Докажите, что эта проекция — правильный шестиугольник.

61. Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно к его диагонали, является правильным шестиугольником.

62. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. а) Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1. б) В каком отношении делит отрезки AB_1 и BC_1 общий перпендикуляр к прямым AB_1 и BC_1?

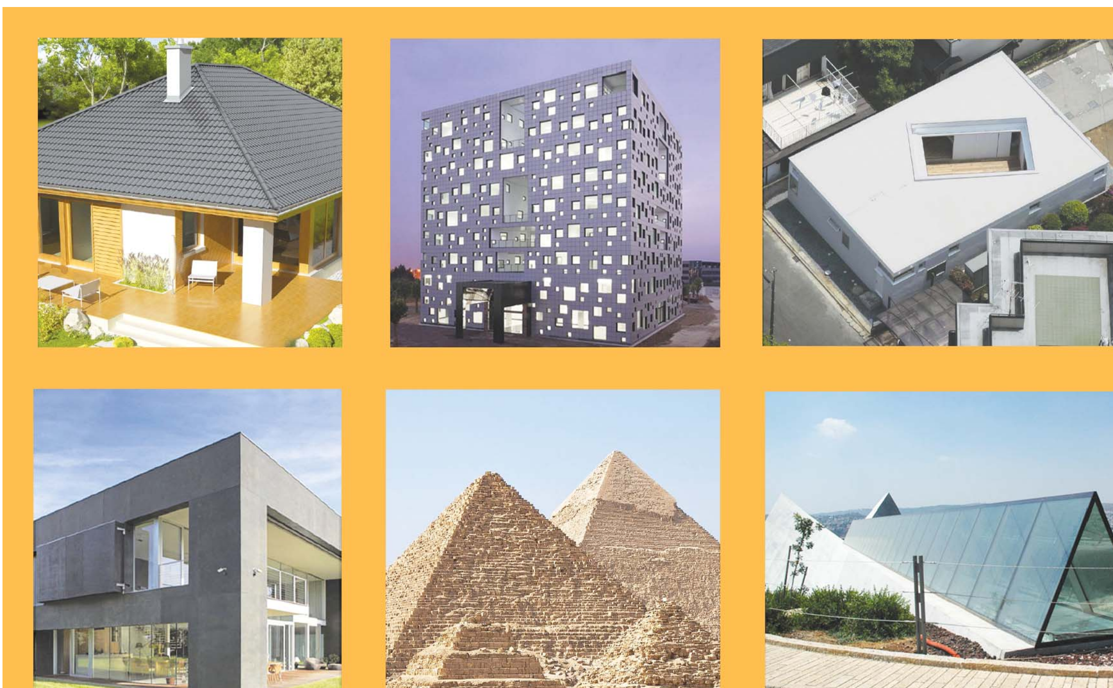
Глава 2

Многогранники

В этой главе мы будем изучать многогранники. С двумя видами этих фигур — тетраэдром и прямоугольным параллелепипедом — вы познакомились в первой главе. Здесь мы рассмотрим и другие виды многогранников, познакомимся с их свойствами, выведем формулы для вычисления объёмов и площадей поверхностей. Эти формулы имеют важное практическое значение, поскольку многие окружающие нас предметы имеют форму многогранников — здания, различные помещения, коробки и т. д.

С многогранниками связан новый тип углов — многогранные, и в частности трёхгранные углы. Мы рассмотрим некоторые свойства этих углов.

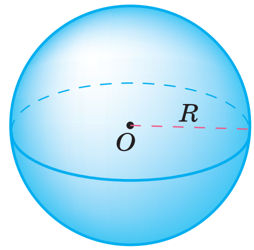
Среди множества многогранников особое место занимают правильные многогранники. Оказывается, что существует всего пять видов таких многогранников. С одним из них — кубом — вы давно знакомы. А что представляют собой ещё четыре вида? Об этом, а также о симметрии правильных многогранников вы узнаете из этой главы.



§ 3

Призма и пирамида

17 Геометрические тела и поверхности



Шар с центром O радиуса R

Рис. 89

3

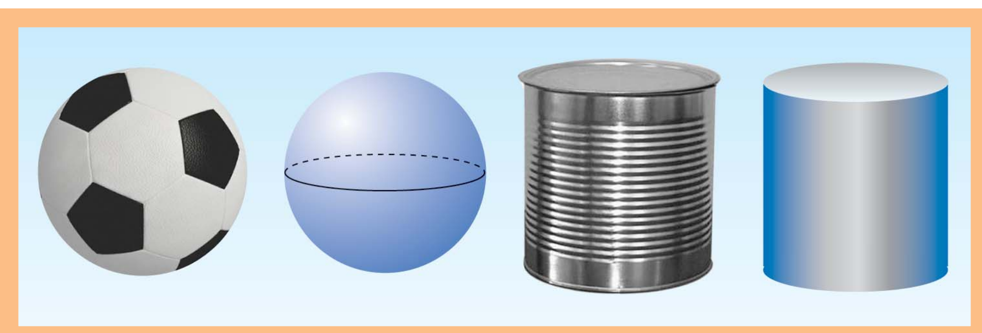
В стереометрии наряду с фигурами, расположенными в какой-то плоскости (прямые, многоугольники и т. д.) либо составленными из нескольких плоских фигур (тетраэдр, прямоугольный параллелепипед), рассматриваются геометрические тела и их поверхности. Можно сказать, что геометрическое тело — это часть пространства, отделённая от остальной части пространства поверхностью — границей этого тела.

Так, например, геометрическим телом является шар с центром O радиуса R — это часть пространства, состоящая из точки O и всех точек, находящихся от точки O на расстоянии, не превосходящем R (рис. 89). Границей шара, отделяющей его от остальной части пространства, является сфера — поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на расстоянии R от точки O.

Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Форму шара имеет футбольный мяч. Консервная банка даёт представление о другом теле — цилиндре, граница которого состоит из двух кругов (оснований цилиндра) и боковой поверхности.

Уточним понятия геометрического тела и его границы.

Фигура называется ограниченной, если все её точки принадлежат какому-нибудь шару. Например, тетраэдр — ограниченная фигура, а прямая и плоскость — неограниченные фигуры.



Фигура называется связной, если любые две её точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей этой фигуре. Например, прямоугольный параллелепипед — связная фигура, а фигура, состоящая из двух его оснований, связной не является.

Точка M называется граничной точкой фигуры, если в любом шаре с центром M есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. При этом сама граничная точка может принадлежать фигуре, но может и не принадлежать ей. Множество всех граничных точек фигуры называется её границей. Например, границей шара является сфера.

Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется внутренней точкой фигуры. Иными словами, точка M фигуры называется внутренней, если существует шар с центром M, все точки которого принадлежат фигуре.

Геометрическим телом (или просто телом) будем называть ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причём для любой её граничной точки M в любом шаре с центром M содержатся внутренние точки фигуры.

Согласно этому определению шар является геометрическим телом, а сфера не является, поскольку у неё нет внутренних точек: каждая точка сферы является её граничной точкой. Границу тела называют также его поверхностью и говорят, что поверхность ограничивает тело.

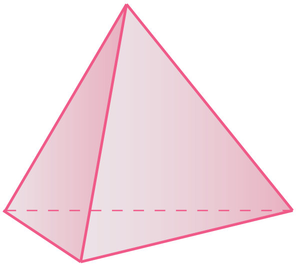
В дальнейшем нам понадобится понятие равных тел. Чтобы дать соответствующее определение, введём понятие движения пространства. Оно аналогично понятию движения плоскости, которое мы рассматривали в курсе планиметрии.

Пусть каждой точке M пространства поставлена в соответствие некоторая (только одна) точка M_1 и при этом каждая точка M_1 оказывается поставленной в соответствие какой-то точке M. Тогда говорят, что задано отображение пространства на себя. Говорят также, что при данном отображении точка M переходит (отображается) в точку M_1.

Движением пространства называется такое отображение пространства на себя, при котором сохраняются расстояния между точками. Это означает, что если при движении точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $A_1B_1 = AB$. Некоторые виды движений пространства мы рассмотрим позднее (см. п. 55).

Две фигуры в пространстве (и, в частности, два тела) называются равными, если существует движение пространства, при котором одна фигура переходит в другую. Примерами равных тел могут служить два шара одинакового радиуса, а также два прямоугольных параллелепипеда, измерения которых соответственно равны.

Замечание. Напомним, что для плоских фигур, лежащих в одной плоскости, в курсе планиметрии мы дали такое определение равных фигур: две фигуры (на плоскости) называются равными, если их можно со-



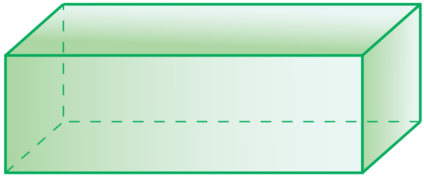


Рис. 90

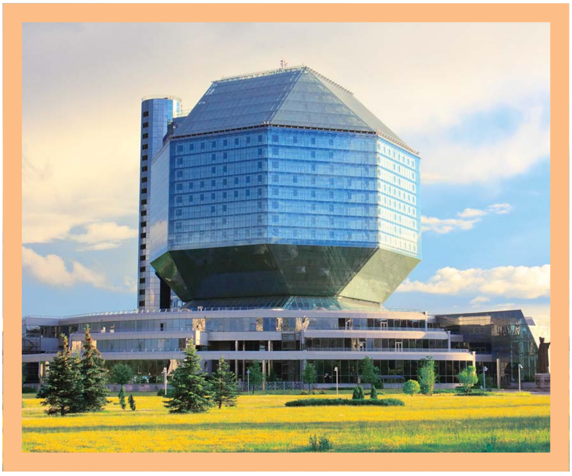
3

вместить наложением. Возникает вопрос: если две плоские фигуры равны согласно этому определению, то будут ли они равны согласно данному выше общему определению равных в пространстве фигур? Ответ на этот вопрос положительный. Доказательство приведено в приложении «Система аксиом геометрии» на с. 243.

18 Многогранник

Поверхность, составленная из многоугольников с их внутренними областями и ограничивающая некоторое геометрическое тело, называется многогранником.

Примерами многогранников являются уже знакомые нам тетраэдр — поверхность, составленная из четырёх треугольников, и прямоугольный



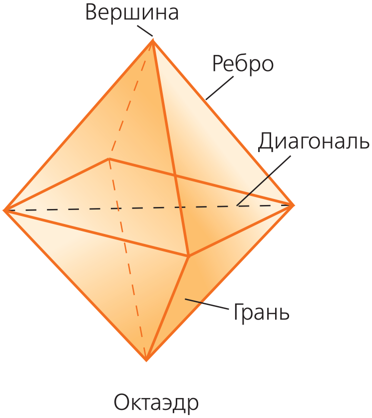


Рис. 91

параллелепипед — поверхность, составленная из шести прямоугольников (рис. 90). Ещё одним примером многогранника является октаэдр — поверхность, составленная из восьми треугольников (рис. 91). Тело, ограниченное многогранником, также называют многогранником.

Многоугольники (с их внутренними областями), из которых составлен многогранник, называют его гранями, стороны граней — рёбрами, а концы рёбер — вершинами многогранника.

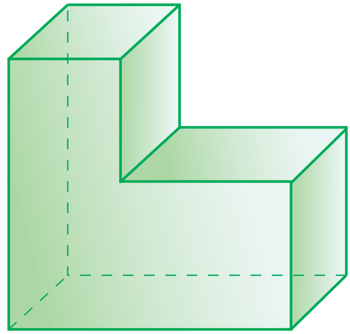

Невыпуклый многогранник

Рис. 92

3

Две грани, имеющие общее ребро, называются смежными (предполагается, что никакие две смежные грани не лежат в одной плоскости). Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной и той же грани, называется диагональю многогранника (см. рис. 91).

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Тетраэдр и прямоугольный параллелепипед — выпуклые многогранники.

На рисунке 92 изображён невыпуклый многогранник, составленный из восьми многоугольников. Ясно, что все грани выпуклого многогранника — выпуклые многоугольники.

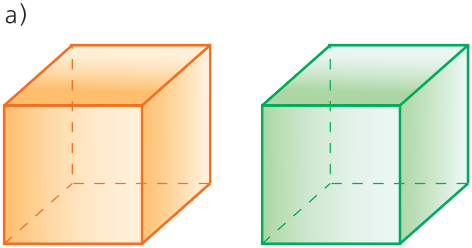
19 Объём тела

С понятием объёма мы знакомы из повседневной жизни. Каждый понимает, что означают, например, слова «объём кастрюли равен трём литрам». В геометрии под объёмом тела понимается величина части пространства, занимаемой этим телом.

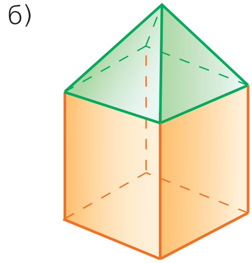
Измерение объёмов тел аналогично измерению площадей плоских фигур. Оно основано на сравнении данного тела с единицей измерения объёмов, в качестве которой обычно берут куб с ребром, равным единице измерения отрезков.

Например, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения объёмов принимают куб с ребром 1 см. Такой куб называют кубическим сантиметром и обозначают так: см^3. Аналогично определяются кубический метр (м^3), кубический дециметр (дм^3) и т. д.

В результате измерения объёма тела получается положительное число, показывающее, сколько единиц измерения и её частей содержится (укладывается) в этом теле.



Два равных тела имеют равные объёмы



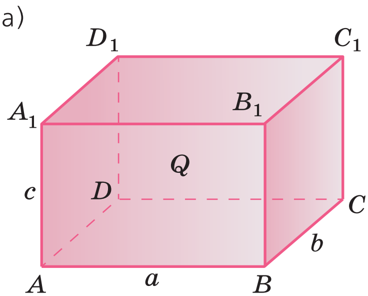
Объём тела, составленного из двух тел, равен сумме их объёмов

Рис. 93

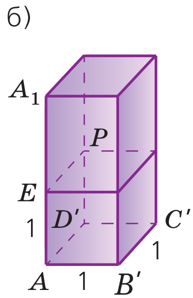
Объёмы тел обладают свойствами, аналогичными основным свойствам площадей:

1 равные тела имеют равные объёмы (рис. 93, *а*);

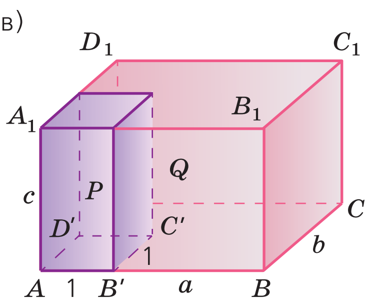
2 если тело составлено из нескольких тел (так, что любые два из них не имеют общих внутренних точек), то его объём равен сумме объёмов этих тел (рис. 93, *б*).



Q — прямоугольный параллелепипед с измерениями a, b и c



Куб с ребром 1 и его части укладываются в параллелепипеде P столько раз, сколько раз отрезок AE и его части укладываются в отрезке AA_1 (т. е. c раз)



Параллелепипед P и его части укладываются в параллелепипеде Q столько раз, сколько раз квадрат $AB'C'D'$ и его части укладываются в прямоугольнике $ABCD$ (т. е. ab раз)

Рис. 94

Утверждения 1 и 2 выражают основные свойства объёмов. Опираясь на них, докажем, что

- **объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.**

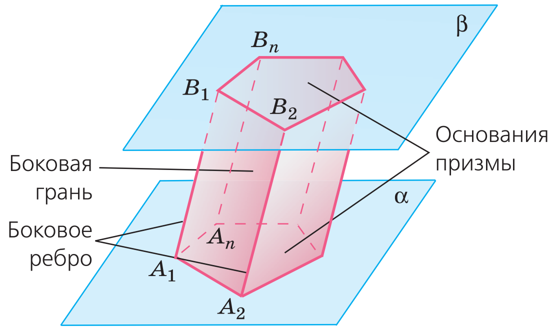
Рассмотрим прямоугольный параллелепипед Q с измерениями $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$ (рис. 94, *а*). Докажем, что его объём V выражается формулой $V=abc$.

Возьмём сначала прямоугольный параллелепипед P, у которого рёбра AB' и AD' равны единице измерения отрезков, а ребро AA_1 равно c (рис. 94, *б*). Ясно, что единица измерения объёмов (т. е. куб с ребром 1) и её части (прямоугольные параллелепипеды с основанием $AB'C'D'$ и высотой, равной $\frac{1}{10}AE$, $\frac{1}{100}AE$ и т. д.) укладываются в параллелепипеде P столько раз, сколько раз единица измерения отрезков (отрезок AE) и её части $\left(\frac{1}{10}AE, \frac{1}{100}AE \text{ и т. д.}\right)$ укладываются в отрезке AA_1, т. е. c раз. Следовательно, объём параллелепипеда P выражается числом c.

Аналогично параллелепипед P и его части укладываются в параллелепипеде Q столько раз, сколько раз единица измерения площадей (т. е. квадрат $AB'C'D'$ со стороной 1) и её части укладываются в прямоугольнике $ABCD$, т. е. ab раз (рис. 94, *в*). Следовательно, объём параллелепипеда Q отличается от объёма параллелепипеда P в ab раз, поэтому он равен abc.

Замечание. Мы знаем, как с помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата: нужно провести диагональ данного квадрата (для этого даже циркуль не нужен), она и является стороной квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата. А можно ли с помощью циркуля и линейки построить ребро куба с объёмом, вдвое большим объёма данного куба? Эту задачу (задача об удвоении куба) пытались решить ещё в глубокой древности, но лишь в 1837 г. французский математик Пьер Лоран Ванцель (1814—1848) доказал невозможность такого построения. Он доказал также неразрешимость ещё одной классической задачи на построение — произвольный данный угол разделить на три равных угла (задача о трисекции угла).

Напомним, что к числу классических неразрешимых задач на построение относится ещё одна задача — построить квадрат, равновеликий данному кругу (задача о квадратуре круга). Неразрешимость этой задачи доказал немецкий математик Карл Луи Фердинанд фон Линдеман (1852—1939) в 1882 г.



Призма $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$

Рис. 95

20 Призма

Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и многоугольник $A_1A_2...A_n$, расположенный в плоскости α. Через вершину A_1 проведём прямую, пересекающую плоскость β в точке B_1, а через вершины A_2, ..., A_n — прямые, параллельные прямой A_1B_1. Эти прямые пересекают плоскость β в некоторых точках B_2, ..., B_n (рис. 95). Каждый из n четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные стороны (например, стороны A_1B_1 и A_2B_2 четырёхугольника $A_1A_2B_2B_1$ параллельны по построению, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны в силу того, что они принадлежат линиям пересечения двух параллельных плоскостей третьей). Отсюда следует, что стороны многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ соответственно равны, и плоскость α можно наложить на плоскость β так, что совместятся соответствующие вершины этих многоугольников (A_1 и B_1, ..., A_n и B_n). Следовательно, указанные многоугольники равны.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$, называется <u>n-угольной призмой</u>, которая обозначается так: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. Грани $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются <u>основаниями</u> призмы, параллелограммы — её <u>боковыми гранями</u>, а образованная боковыми гранями поверхность — <u>боковой поверхностью</u> призмы. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, равные и параллельные друг другу, называются <u>боковыми рёбрами</u> призмы. Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется <u>высотой</u> призмы.

Если одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания, то и остальные боковые рёбра перпендикулярны к этой плоскости. В этом случае призма называется прямой, а в противном случае — наклонной.

Прямая призма называется правильной, если её основания — правильные многоугольники. У правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники (докажите это).

Докажем теорему об объёме призмы.

ТЕОРЕМА

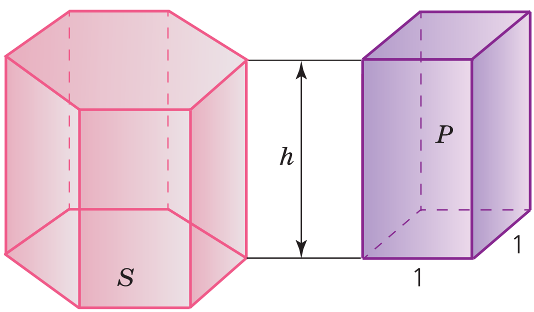
Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство. Возможны два случая: 1) данная призма — прямая; 2) данная призма — наклонная. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1 Рассмотрим прямую призму с площадью основания S и высотой h, а также прямоугольный параллелепипед P с высотой h, основанием которого является квадрат со стороной, равной 1 (рис. 96). Ясно, что прямоугольный параллелепипед P и его части укладываются в призме столько раз, сколько раз квадрат со стороной 1 и его части укладываются в её основании, т. е. S раз. А поскольку объём параллелепипеда P равен h, то объём призмы равен Sh, что и требовалось доказать.

2 Рассмотрим теперь наклонную призму. Сначала для большей наглядности возьмём треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с площадью основания S и высотой $A_1H = h$ (рис. 97, *а*). Для краткости записи обозначим эту призму P_1. Докажем, что её объём равен Sh.

Отметим на луче AA_1 точки D и D_1 так, что $DD_1 = AA_1$, а плоскости, проходящие через эти точки перпендикулярно к прямой AA_1, не пересекаются с призмой P_1. Указанные плоскости пересекают прямые BB_1 и CC_1 в некоторых точках E, E_1 и F, F_1, в результате чего образуется прямая призма $DEFD_1E_1F_1$, которую обозначим P_2.



Прямоугольный параллелепипед P и его части укладываются в призме столько раз, сколько раз квадрат со стороной 1 и его части укладываются в основании призмы (т. е. S раз)

Рис. 96

Рассмотрим многогранники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Первый из них составлен из призмы P_1 и многогранника $A_1B_1C_1DEF$, который обозначим P_3, а второй составлен из многогранника P_3 и призмы P_2. Если переместить многогранник $ABCDEF$ вдоль прямой AA_1 так, чтобы точки A, B и C совместились с точками A_1, B_1 и C_1, то точки D, E и F совместятся, очевидно, с точками D_1, E_1 и F_1 (так как $DD_1 = EE_1 = FF_1 = AA_1$), и, следовательно, многогранник $ABCDEF$ совместится с многогранником $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Поэтому эти многогранники равны и, значит, имеют равные объёмы, а поскольку многогранник P_3 — их общая часть, то равны объёмы призм P_1 и P_2.

Согласно доказанному в 1 объём прямой призмы P_2 равен $S_1 \cdot DD_1$, где S_1 — площадь основания этой призмы (треугольника DEF). Треугольник DEF является ортогональной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость DEF, поэтому

$$S_1 = S \cdot \cos\varphi, \qquad (1)$$

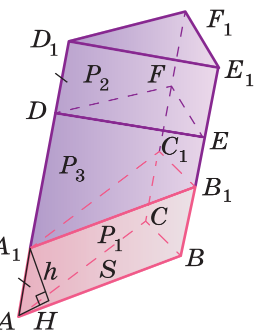
где φ — угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и DEF (см. п. 12).

Заметим теперь, что угол AA_1H — это угол между прямыми AA_1 и A_1H, перпендикулярными соответственно к плоскостям DEF и $A_1B_1C_1$, поэтому $\angle AA_1H = \varphi$. В самом деле, обратимся к рисунку 97, *б*, на котором плоскость α — это плоскость $A_1B_1C_1$, а плоскость β проходит через точку A_1 параллельно плоскости DEF и, следовательно, перпендикулярно к прямой AA_1. На этом рисунке угол MA_1N — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β, а поскольку $\beta \parallel DEF$, то $\angle MA_1N = \varphi$. Учитывая, что $AA_1 \perp A_1N$ (так как $AA_1 \perp \beta$), $A_1H \perp A_1M$ (так как $A_1H \perp \alpha$) и лучи A_1M, A_1N, A_1A и A_1H лежат в одной плоскости (в плоскости, проходящей через точку A_1 перпендикулярно к ребру указанного двугранного угла), приходим к выводу: углы AA_1H и MA_1N равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами и, значит,

$$\angle AA_1H = \angle MA_1N = \varphi.$$

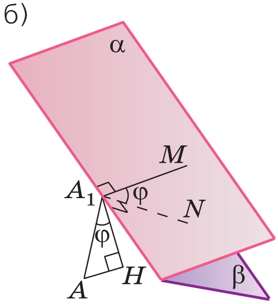
Следовательно, $AA_1 = \dfrac{A_1H}{\cos\varphi} = \dfrac{h}{\cos\varphi}$, а так как $DD_1 = AA_1$, то $DD_1 = \dfrac{h}{\cos\varphi}$.

а)



$DD_1 = AA_1$, $DEF \perp AA_1$

б)



$AA_1 \perp \beta$, $A_1H \perp \alpha$

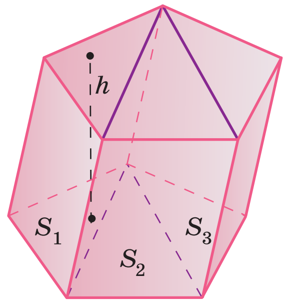
Рис. 97

Итак, для объёма V призмы P_1, равного объёму призмы P_2, используя равенство (1), получаем выражение

$$V = S_1 \cdot DD_1 = S\cos\varphi \cdot \frac{h}{\cos\varphi} = Sh, \qquad (2)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь произвольную наклонную призму с площадью основания S и высотой h. Её можно разбить на треугольные призмы, у каждой из которых высота равна h (на рисунке 98 пятиугольная призма разбита на три треугольные призмы).



$S = S_1 + S_2 + S_3,$
$V = S_1h + S_2h + S_3h =$
$= Sh$

Рис. 98

Выразив объём каждой треугольной призмы по формуле (2), сложив эти выражения и вынеся в правой части равенства множитель h за скобки, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объём V наклонной призмы выражается формулой $V = Sh$.

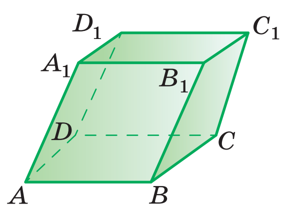
3

21 Параллелепипед

Призма, основанием которой является параллелограмм, называется <u>параллелепипедом</u>. Можно сказать, что параллелепипед — это многогранник, составленный из шести параллелограммов. На рисунке 99 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Две его грани, не имеющие общих рёбер (например, грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1), называются <u>противоположными</u>. Докажем, что

■ **противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.**

Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и докажем, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны (т. е. параллельны плоскости этих граней) и равны. Так как $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$, то две пересекающиеся прямые (AB и AA_1), лежащие в плоскости грани ABB_1A_1, соответственно параллельны двум прямым (DC и DD_1), лежащим в плоскости грани DCC_1D_1, поэтому эти грани параллельны (по признаку 3° параллельности двух плоскостей, см. с. 50).



Параллелепипед
$ABCDA_1B_1C_1D_1$

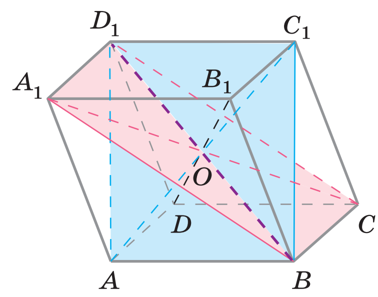
Рис. 99

Далее, из соотношений $A_1D_1 = B_1C_1 = BC$ и $A_1D_1 \parallel B_1C_1 \parallel BC$ следует, что четырёхугольник A_1D_1CB — параллелограмм (поскольку противоположные стороны A_1D_1 и BC равны и параллельны), и, значит, $A_1B = D_1C$. Следовательно, треугольники AA_1B и DD_1C равны по трём сторонам ($AB = DC$, $AA_1 = DD_1$ и $A_1B = D_1C$), поэтому $\angle A_1AB = \angle D_1DC$.

Таким образом, две смежные стороны (AB и AA_1) и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам (DC и DD_1) и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1, и, значит, эти параллелограммы равны.

В параллелепипеде любые две противоположные грани можно принять за основания; остальные грани параллелепипеда и его рёбра, не принадлежащие основаниям, при этом окажутся боковыми. Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми рёбрами будут отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Если одно из боковых рёбер параллелепипеда перпендикулярно к плоскости основания, то и остальные боковые рёбра перпендикулярны к этой плоскости (так как все боковые рёбра параллельны друг другу). В этом случае все боковые грани являются прямоугольниками и параллелепипед называется прямым. Если же и основаниями прямого параллелепипеда служат прямоугольники, то параллелепипед является прямоугольным.

Параллелепипед имеет четыре диагонали (отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 на рисунке 100). Две вершины, являющиеся концами диагонали, называются противоположными. Докажем, что



A_1C и D_1B — диагонали параллелограмма A_1D_1CB.
AC_1 и D_1B — диагонали параллелограмма AD_1C_1B

Рис. 100

диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Рассмотрим четырёхугольник A_1D_1CB, диагонали A_1C и D_1B которого являются диагоналями данного параллелепипеда. Выше мы доказали, что этот четырёхугольник — параллелограмм, и, следовательно, его диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и делятся этой точкой пополам.

Аналогично можно доказать, что четырёхугольник AD_1C_1B тоже параллелограмм, поэтому его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Точно так же можно доказать, что диагональ DB_1 проходит через точку O и делится этой точкой пополам.

22 Пирамида

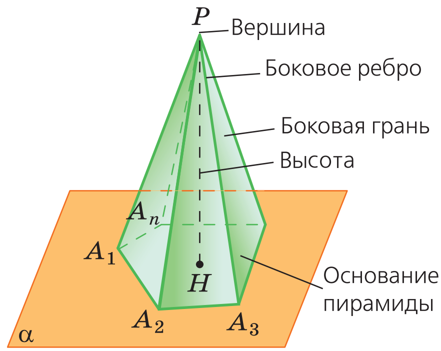
Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$, лежащий в плоскости α, и точку P, не лежащую в этой плоскости. Если соединить точку P отрезками с вершинами многоугольника (рис. 101), то образуется n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1. Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и этих треугольников, называется n-угольной пирамидой и обозначается так: $PA_1A_2...A_n$. Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется основанием пирамиды, указанные треугольники — её боковыми гранями, образованная ими поверхность — боковой поверхностью пирамиды, отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — боковыми рёбрами, а точка P — вершиной пирамиды. Перпендикуляр PH, проведённый из точки P к плоскости основания пирамиды, называется высотой пирамиды. Очевидно, что треугольная пирамида — это тетраэдр.

Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром этого многоугольника, является её высотой. Напомним, что центр правильного многоугольника является центром окружности, описанной около многоугольника (рис. 102).

Докажем, что

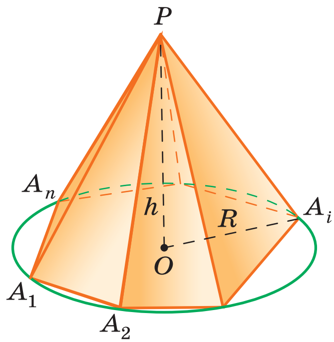
все боковые рёбра правильной пирамиды равны и все её боковые грани также равны.

В самом деле, любое боковое ребро PA_i правильной пирамиды $PA_1A_2...A_n$ является гипотенузой прямоугольного треугольника, один катет которого — высота пирамиды (отрезок PO на рисунке 102), а другой — радиус окружности, описанной около её основания (отрезок OA_i). Так как все эти треугольники равны (по двум катетам), то $PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n$, т. е. боковые рёбра пирамиды $PA_1A_2...A_n$ равны, а её боковые грани — равнобедренные треугольники с равными боковыми сторонами и равными основаниями



Пирамида $PA_1A_2\ldots A_n$

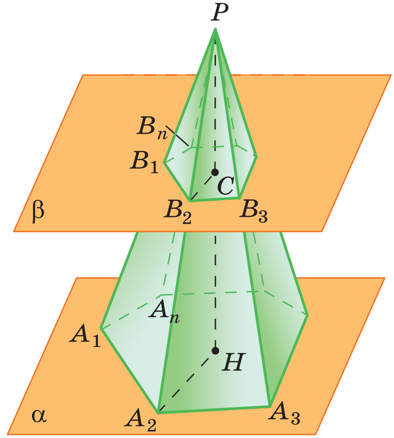
Рис. 101



Правильная пирамида $PA_1A_2\ldots A_n$

Рис. 102

(поскольку многоугольник $A_1A_2...A_n$ — правильный). Следовательно, боковые грани правильной пирамиды равны (по трём сторонам).



Усечённая пирамида
$A_1A_2 ... A_nB_1B_2 ... B_n$

Рис. 103

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется апофемой.

Отметим на боковом ребре PA_1 пирамиды $PA_1A_2...A_n$ произвольную точку B_1 и проведём через неё плоскость β, параллельную плоскости α. Плоскость β пересекает рёбра PA_2, ..., PA_n в некоторых точках B_2, ..., B_n и разбивает пирамиду $PA_1A_2...A_n$ на пирамиду $PB_1B_2...B_n$ и многогранник, который называется усечённой пирамидой и обозначается так: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ (рис. 103). Многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются основаниями усечённой пирамиды, остальные грани — её боковыми гранями, образованная боковыми гранями поверхность — боковой поверхностью, а отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — боковыми рёбрами усечённой пирамиды. Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого (например, отрезок CH на рисунке 103), называется высотой усечённой пирамиды. Докажем, что

боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 103). Её стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку лежат на прямых, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью PA_1A_2. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 грани $A_1A_2B_2B_1$ не параллельны и лежат в одной плоскости, так как прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P. Следовательно, грань $A_1A_2B_2B_1$ — трапеция.

Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

Усечённая пирамида называется правильной, если она получена отсечением от правильной пирамиды. Докажите самостоятельно, что

основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции.

Высоты этих трапеций называются апофемами правильной усечённой пирамиды.

Рассмотрим треугольную усечённую пирамиду $ABCA_1B_1C_1$, отсечённую от пирамиды $PABC$ (рис. 104). Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то $\triangle PA_1B_1 \sim \triangle PAB$, поэтому

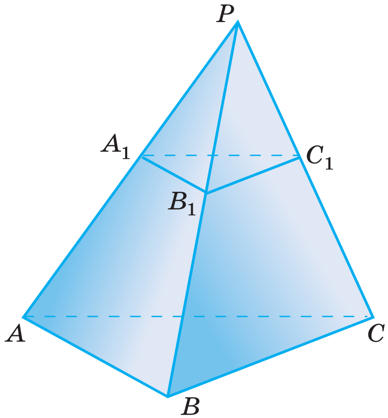
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{PA_1}{PA} = \frac{PB_1}{PB}.$$

Аналогичным образом из подобия треугольников PB_1C_1 и PBC, PC_1A_1 и PCA следуют равенства

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{PB_1}{PB} = \frac{PC_1}{PC} \text{ и } \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{PC_1}{PC} = \frac{PA_1}{PA}.$$

Из этих равенств получаем

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{PA_1}{PA}.$$



$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$,

$k = \dfrac{PA_1}{PA}$

(коэффициент подобия)

Рис. 104

Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \dfrac{PA_1}{PA}$, поэтому для площади треугольника $A_1B_1C_1$ справедливо равенство

$$S_{A_1B_1C_1} = \left(\frac{PA_1}{PA}\right)^2 S_{ABC}. \qquad (3)$$

Это равенство понадобится нам при выводе формулы объёма пирамиды.

23 Объём пирамиды

Вычисление объёма пирамиды основано на следующей формуле, выведенной древнегреческим учёным Архимедом:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

где n — любое натуральное число (формула Архимеда).

Вывод формулы Архимеда основан на тождестве

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Полагая последовательно $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = n$, получаем n равенств

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Складывая их почленно, приходим к равенству

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3\,(1 + 2 + \ldots + n) + n.$$

Отсюда, учитывая, что $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, получаем

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right].$$

Преобразуя правую часть равенства (сделайте это самостоятельно), приходим к формуле Архимеда.

Из формулы Архимеда следует, что

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right),$$

$$\frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right),$$

а поскольку $\left(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}\right) < \dfrac{1}{n}$ и $\left(-\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}\right) > -\dfrac{1}{n}$ (докажите это самостоятельно), то

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] > \frac{1}{3} - \frac{1}{n}.$$

Назовём два последних неравенства <u>неравенствами Архимеда</u> и воспользуемся ими для доказательства <u>теоремы об объёме пирамиды</u>.

ТЕОРЕМА

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

∗ Доказательство. Докажем теорему сначала для треугольной пирамиды, а затем для произвольной пирамиды.

Рассмотрим треугольную пирамиду $PABC$, у которой площадь основания (треугольника ABC) равна S, а высота равна h, и докажем, что объём V этой пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$.

Разобьём ребро PA на n равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ и проведём через эти точки плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, параллельные плоскости ABC. Для единообразия плоскость ABC будем обозначать α_n, а точки A, B и C — A_n, B_n и C_n (рис. 105).

В сечении пирамиды плоскостью α_k получается треугольник $A_kB_kC_k$, площадь S_k которого можно выразить формулой (см. равенство (3) п. 22)

$$S_k = \left(\frac{PA_k}{PA}\right)^2 S_{ABC} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 S, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Проведённые плоскости разбивают пирамиду $PABC$ на пирамиду $PA_1B_1C_1$ и $(n-1)$ усечённых пирамид, высота каждой из которых равна $\frac{h}{n}$.

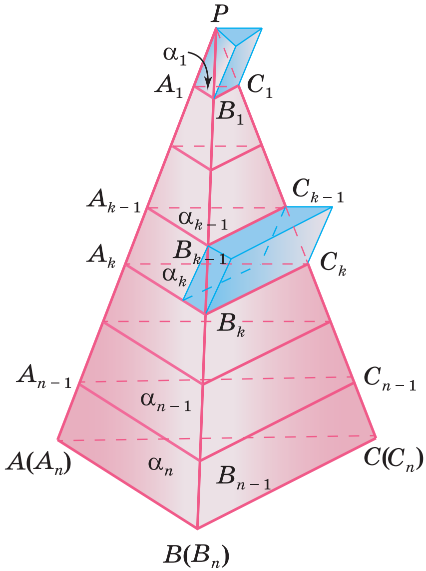


Рис. 105

Заметим, что пирамида $PA_1B_1C_1$ содержится в призме с основанием $A_1B_1C_1$ и боковым ребром PA_1, объём которой равен $S_1\frac{h}{n}$, а усечённая пирамида $A_kB_kC_kA_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}$ $(k = 2, 3, ..., n)$, с одной стороны, содержится в призме с основанием $A_kB_kC_k$ и боковым ребром A_kA_{k-1} (объём этой призмы равен $S_k\frac{h}{n}$), а с другой стороны, содержит в себе призму с основанием $A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}$ и боковым ребром A_kA_{k-1} (её объём равен $S_{k-1}\frac{h}{n}$). Поэтому для объёма V_k каждой из этих пирамид справедливы неравенства

$$0 < V_1 < S_1\frac{h}{n},$$

$$S_{k-1}\frac{h}{n} < V_k < S_k\frac{h}{n}, \quad k = 2,\ 3,\ ...,\ n.$$

Складывая почленно все эти неравенства и учитывая, что

$$V_1 + V_2 + ... + V_n = V,$$

где V — объём пирамиды $PABC$, приходим к неравенствам

$$\frac{h}{n}(S_1 + S_2 + ... + S_{n-1}) < V < \frac{h}{n}(S_1 + S_2 + ... + S_n).$$

Применив формулу (4), перепишем эти неравенства в виде

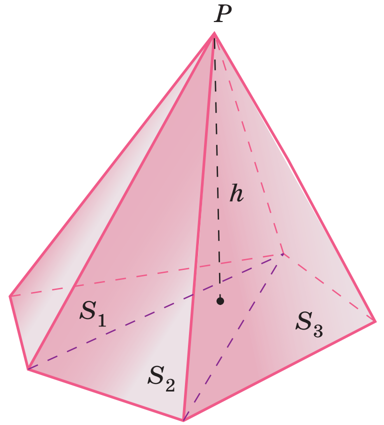
$$Sh\frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2] < V < Sh\frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + n^2].$$

Отсюда, используя неравенства Архимеда, получаем

$$Sh\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right) < V < Sh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right).$$

Если $n \to \infty$, то $\frac{1}{n} \to 0$, поэтому левая и правая части этих неравенств стремятся к $\frac{Sh}{3}$. Следовательно, $V = \frac{1}{3}Sh$. Таким образом, мы доказали теорему для треугольной пирамиды.

Рассмотрим теперь произвольную пирамиду с площадью основания S и высотой h. Разбив основание пирамиды на треугольники и соединив вершину P пирамиды с вершинами этих треугольников, получим разбиение пирамиды на треугольные пирамиды с общей высотой h (рис. 106; на этом рисунке пятиугольная пирамида разбита на три треугольные пирамиды). Выразим объём V_k каждой из треугольных пирамид по формуле $V_k = \frac{1}{3}S_k h$ и сложим эти равенства. В левой части равенства получим объём V исходной пирамиды, а в правой части, вынеся за скобки общий множитель $\frac{1}{3}h$, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т. е. площадь S основания исходной пирамиды. Таким образом, $V = \frac{1}{3}Sh$, что и требовалось доказать. ∗



$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$V = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h = \frac{1}{3}Sh$$

Рис. 106

Замечание 1. Усечённая пирамида получается путём отсечения одной пирамиды от другой пирамиды, поэтому объём усечённой пирамиды равен разности объёмов исходной пирамиды и отсечённой. Исходя из этого, нетрудно вывести (сделайте это самостоятельно) следующую формулу объёма V усечённой пирамиды с высотой h и площадями оснований S_1 и S_2:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

Замечание 2. В курсе планиметрии мы говорили, что любые два равновеликих многоугольника равносоставлены — в этом состоит теорема Бойяи — Гервина. В 1900 г. на II Международном Конгрессе математиков великий немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) представил список из 23 основных проблем математики, в котором под номером три стоял вопрос: верно ли аналогичное утверждение в отношении многогранников? В том же году немецкий математик Макс Ден (1878—1952) обосновал отрицательный ответ на этот вопрос. В частности, он доказал, что тетраэдр, все рёбра которого равны, не является равносоставленным с кубом того же объёма.

Вопросы и задачи

63. а) Какое наименьшее число вершин может иметь многогранник?
б) Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 1 : 2 : 2, диагональ параллелепипеда равна 3 см. Найдите его объём.
в) Два измерения прямоугольного параллелепипеда и его диагональ относятся как 1 : 2 : 3, а третье измерение равно 4 см. Найдите объём параллелепипеда.
г) Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной a. Угол между диагональю параллелепипеда и боковой гранью равен 30°. Найдите объём параллелепипеда.
д) Периметр основания прямоугольного параллелепипеда равен P, его высота равна h, а площадь поверхности равна S. Найдите его объём.
е)* Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 144 см^3, $AC = 5$ см, $AC_1 = 13$ см. Найдите измерения этого параллелепипеда.
ж)* Докажите, что площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда не превосходит удвоенного квадрата его диагонали, причём равенство достигается только в том случае, когда этот параллелепипед — куб.

64. а) Какое наименьшее число рёбер может иметь многогранник?
б) Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 3 : 6, диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объём.
в) Два измерения прямоугольного параллелепипеда и его диагональ относятся как 2 : 6 : 7, а третье измерение равно 6 см. Найдите объём параллелепипеда.
г) Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d, угол между диагональю и боковой гранью равен 30°. Найдите объём параллелепипеда.
д) Периметр основания прямоугольного параллелепипеда равен 6 см, диагональ этого параллелепипеда равна 3 см, а площадь поверхности равна 16 см^2. Найдите его объём.
е)* Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 840 см^3, $AC = 25$ см, а периметр основания $ABCD$ равен 62 см. Найдите измерения этого параллелепипеда.
ж)* Докажите, что утроенная площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда не превосходит удвоенного квадрата суммы его измерений, причём равенство достигается только в том случае, когда этот параллелепипед — куб.

65. а) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 2\sqrt{2}$. Угол между плоскостями ABC и ABC_1 равен 45°. Найдите объём призмы.
б) Каждое ребро треугольной призмы равно 2 см, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°. Найдите объём призмы.

в) Докажите, что число вершин любой призмы чётно.

г) Докажите, что все двугранные углы при боковых рёбрах правильной призмы равны друг другу.

д) Точки L, N, M_1, N_1 — середины рёбер AB, AC, B_1C_1, A_1C_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ с объёмом 20 см^3. Найдите объём призмы $ALNN_1M_1C_1$.

е) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с прямым углом B. Площадь сечения призмы плоскостью ABC_1 равна S, двугранный угол $CABC_1$ равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

ж) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC с прямым углом C и катетами, равными 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если $\angle A_1BC = 60°$.

з) Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с объёмом 25 см^3 является трапеция с основаниями $AD = 4$ см и $BC = 1$ см, диагонали грани $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите объём призмы $ABOCDA_1B_1O_1C_1D_1$.

3

и) Через вершины A_1 и B_4 правильной шестиугольной призмы $A_1A_2...$ $...A_6B_1B_2...B_6$ проведена секущая плоскость, параллельная прямой A_2A_6 и составляющая угол в 30° с плоскостью основания призмы. Найдите площадь сечения, если $A_1A_2 = a$.

к)* Призма $A_1A_2...A_5B_1B_2...B_5$ — правильная. Найдите площадь боковой поверхности призмы $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, если $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 + A_1B_1 = 3a$.

66. а) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 12$ и боковой стороной, равной 10. Угол между плоскостями ABC и ABC_1 равен 60°. Найдите объём призмы.

б) Основанием призмы является правильный треугольник, а одна из граней является ромбом, диагонали которого равны 6 и 8, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°. Найдите объём призмы.

в) Докажите, что число рёбер любой призмы делится на 3.

г) Докажите, что все боковые грани правильной призмы — равные прямоугольники.

д) Точки K, L, M, N — середины рёбер AB, AD, C_1B_1, C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с объёмом 24 см^3, O и O_1 — точки пересечения диагоналей граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объём призмы $AKOLO_1MC_1N$.

е) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$. Площадь сечения призмы плоскостью ACB_1 равна S, двугранный угол $BACB_1$ равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

ж) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC с прямым углом C и катетами $AC = 3$, $BC = 4$. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если $\angle BA_1C = 30°$.

з) Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с объёмом 50 см^3 является трапеция, основания которой $AD = 3$ см и $BC = 2$ см, диагонали грани $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите объём призмы $AOBCDA_1O_1B_1C_1D_1$.

и) Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $A_1A_2...A_6B_1B_2...B_6$ плоскостью $A_1A_2B_4$, если $A_1A_2 = A_1B_1 = a$.

к)* Призма $A_1A_2...A_5B_1B_2...B_5$ — правильная. Найдите площадь боковой поверхности призмы $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$, если $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 + A_1B_1 = 4a$.

67. а) Диагонали грани AA_1B_1B параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Сравните отрезки AO и DC_1.

б) Найдите объём параллелепипеда, основание которого — ромб со стороной 1 и острым углом 60°, а боковые грани — квадраты.

в) На рёбрах AB и CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки P и Q. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P и Q параллельно прямой AA_1.

г) Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с объёмом 25 см^3 является прямоугольник $ABCD$, плоскости ABC и CDA_1 взаимно перпендикулярны. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью CDA_1, если $AD = 5$ см.

д) Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 6 см. Отрезок, соединяющий вершину A_1 с центром квадрата $ABCD$, равен 4 см и перпендикулярен к плоскости квадрата. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

е)* Докажите, что сумма квадратов четырёх диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его рёбер.

68. а) Точки M и N — середины рёбер AD и B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что отрезки AC_1 и MN пересекаются.

б) Найдите объём параллелепипеда, основание которого — ромб со стороной 1 и острым углом 45°, а боковые грани — квадраты.

в) На ребре AB параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка P. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P и C параллельно прямой AD_1.

г) Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, сторона AD которого равна 8 см, $\angle A = 30°$, а его плоскость перпендикулярна к секущей плоскости CDA_1. Площадь сечения равна 15 см^2. Найдите объём параллелепипеда.

д) Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 15 см, а основанием высоты A_1H параллелепипеда является центр этого квадрата. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 510 см^2. Найдите A_1H.

е)* Докажите, что если четыре диагонали параллелепипеда равны друг другу, то этот параллелепипед прямоугольный.

69. а) Докажите, что все боковые грани правильной усечённой пирамиды — равнобедренные трапеции.
б) Точка K делит ребро BC пирамиды $PABC$ в отношении $BK : KC = 2 : 3$. Найдите отношение объёма пирамиды $PABK$ к объёму пирамиды $PABC$.
в) Через точку пересечения медиан боковой грани треугольной пирамиды с объёмом 54 см^3 проведена плоскость, параллельная плоскости её основания. Найдите объём пирамиды, отсекаемой этой плоскостью.
г) Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.
д) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объём пирамиды.
е) Все боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью её основания. Докажите, что около основания можно описать окружность.
ж) Основанием пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$. На ребре PC отмечена точка M. Постройте сечение пирамиды плоскостью ABM.
з)* Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями, равными 12 см и 3 см, все двугранные углы при основании равны 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
и)* Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 1, а один из углов равен 30°. Каждое из боковых рёбер пирамиды образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объём пирамиды.

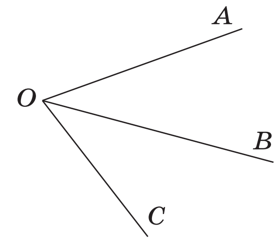
70. а) Докажите, что оба основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники.
б) Точки M и N — середины рёбер BC и AP пирамиды $PABC$. Найдите отношение объёма пирамиды $NABM$ к объёму пирамиды $PABC$.
в) Через середину бокового ребра треугольной пирамиды с объёмом 80 см^3 проведена плоскость, параллельная плоскости её основания. Найдите объём усечённой пирамиды, отсекаемой этой плоскостью.
г) Докажите, что площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.
д)* Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны a. Докажите, что эта пирамида правильная, и найдите её объём.
е) Все двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что в основание можно вписать окружность.
ж) Основанием пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$. На рёбрах PA, PB и PC отмечены точки K, L и M. Постройте сечение пирамиды плоскостью KLM.
з)* Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями, равными 4 см и 3 см, все двугранные углы при основании равны 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
и)* Основанием пирамиды является многоугольник, периметр которого равен $2p$, каждый из двугранных углов при основании равен α, высота пирамиды равна h. Найдите объём пирамиды.

§4

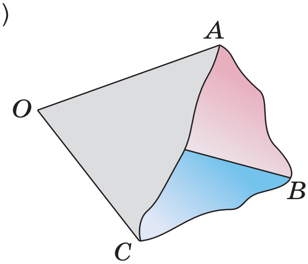
Многогранные углы

24 Трёхгранный угол

а)



б)



Трёхгранный угол $OABC$

Рис. 107

Рассмотрим три луча OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости (рис. 107, *а*). Каждые два из них являются сторонами плоского угла. Под плоским углом будем понимать фигуру, содержащую не только точку (вершину угла) и два луча, исходящие из этой точки, но и внутреннюю область угла.

Фигура, составленная из трёх плоских углов AOB, BOC и COA (рис. 107, *б*), называется трёхгранным углом и обозначается так: $OABC$. Точка O называется вершиной трёхгранного угла, лучи OA, OB и OC — его рёбрами, а плоские углы AOB, BOC и COA — гранями трёхгранного угла.

С трёхгранным углом $OABC$ связаны три двугранных угла: двугранный угол, у которого ребром служит прямая OA, а грани содержат плоские углы AOB и AOC, и два аналогичных угла, рёбрами которых являются прямые OB и OC.

* Выведем некоторые соотношения, относящиеся к плоским и двугранным углам трёхгранного угла.

Сначала докажем, что

сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360°.

Рассмотрим трёхгранный угол $OABC$ Пусть $\angle AOB = \gamma$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$. Докажем, что

$$\alpha + \beta + \gamma < 360°.$$

Будем считать, что точки A, B и C отмечены на рёбрах так, что $OA = OB = OC = a$ (рис. 108, *а*). Тогда из равнобедренных треугольников AOB, BOC и COA получим

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{AB}{2a}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{2a}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{CA}{2a}. \qquad (1)$$

Проведём перпендикуляр OH к плоскости ABC (рис. 108, *б*). Прямоугольные треугольники OHA, OHB и OHC равны по гипотенузе ($OA = OB = OC$) и катету (OH — общий катет). Поэтому $HA = HB = HC = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Так как $AB = 2R\sin C$, $BC = 2R\sin A$, $CA = 2R\sin B$, то

$$\sin C = \frac{AB}{2R}, \quad \sin A = \frac{BC}{2R}, \quad \sin B = \frac{CA}{2R}. \quad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2) и учитывая, что $R < a$ (поскольку катет HA прямоугольного треугольника OHA, равный R, меньше гипотенузы OA, равной a), приходим к неравенствам

$$\sin\frac{\gamma}{2} < \sin C, \quad \sin\frac{\alpha}{2} < \sin A, \quad \sin\frac{\beta}{2} < \sin B.$$

Рассмотрим первое из этих неравенств: $\sin\frac{\gamma}{2} < \sin C$. Очевидно, что $\frac{\gamma}{2} < 90°$. Поэтому если $\angle C < 90°$, то из неравенства $\sin\frac{\gamma}{2} < \sin C$ следует, что $\frac{\gamma}{2} < \angle C$. Если же $\angle C \geqslant 90°$, то неравенство $\frac{\gamma}{2} < \angle C$ также выполняется, поскольку $\frac{\gamma}{2} < 90°$. Таким образом, в любом случае $\frac{\gamma}{2} < \angle C$.

Аналогично можно доказать, что $\frac{\alpha}{2} < \angle A$ и $\frac{\beta}{2} < \angle B$. Складывая эти три неравенства, получаем

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < \angle A + \angle B + \angle C = 180°,$$

откуда

$$\alpha + \beta + \gamma < 360°.$$

Из доказанного утверждения следует, что

каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Докажем, например, что $\alpha < \beta + \gamma$.

Проведём луч OA_1 — продолжение луча OA (рис. 109). Тогда $\angle COA_1 = 180° - \beta$,

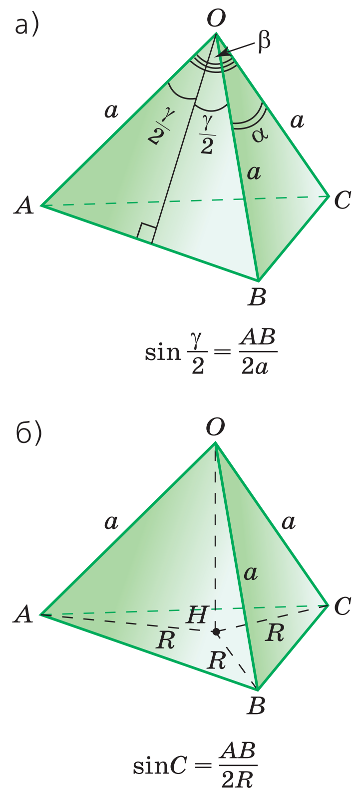


Рис. 108

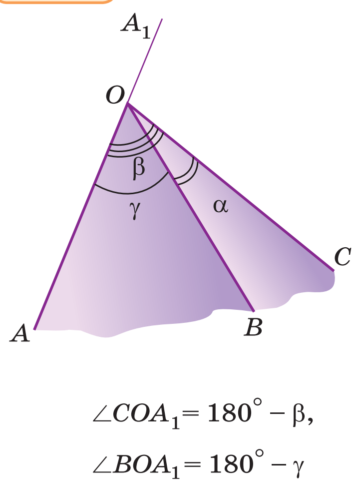


Рис. 109

$\angle BOA_1 = 180° - \gamma$. Так как сумма плоских углов трёхгранного угла OA_1BC меньше 360°, то $\alpha + (180° - \beta) + (180° - \gamma) < 360°$, откуда получаем $\alpha < \beta + \gamma$. ✱

✱✱ Рассмотрим теперь два соотношения, связывающие между собой плоские и двугранные углы трёхгранного угла. Первое из них называется теоремой косинусов для трёхгранного угла.

ТЕОРЕМА 1

Плоские углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ трёхгранного угла $OABC$ и двугранный угол с ребром OA этого трёхгранного угла (обозначим его величину $\angle A$) связаны равенством

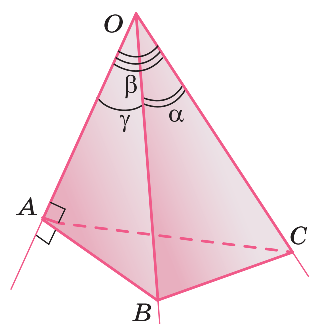
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A. \qquad (3)$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства (3) в том случае, когда углы COA и AOB острые (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Будем считать, что точки A, B и C отмечены на рёбрах так, что $OA = 1$, $AB \perp OA$ и $AC \perp OA$ (рис. 110). Тогда угол BAC будет линейным углом двугранного угла с ребром OA, т. е. $\angle BAC = \angle A$.

Из прямоугольных треугольников OAB и OAC находим:

$$AB = OA \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma,\ \ OB = \frac{1}{\cos\gamma},\ \ AC = \operatorname{tg}\beta,$$
$$OC = \frac{1}{\cos\beta}.$$



$OA = 1, AB \perp OA,\ AC \perp OA$

Рис. 110

Используя эти равенства, выразим BC^2 по теореме косинусов из треугольников ABC и OBC и приравняем два выражения:

$$BC^2 = \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma - 2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\cos A = \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} - 2\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Отсюда, учитывая равенства

$$\operatorname{tg}^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\beta - 1}{\cos^2\beta} = -1,\ \ \operatorname{tg}^2\gamma - \frac{1}{\cos^2\gamma} = -1,\ \ \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta},\ \ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma},$$

получаем

$$-2 - 2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\cdot\cos A = -2\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Умножая это равенство на $-\frac{1}{2}\cos\beta\cos\gamma$, приходим к формуле (3).

СЛЕДСТВИЕ

Если $\angle A = 90°$, т. е. грани OAB и OAC трёхгранного угла взаимно перпендикулярны, то $\cos A = 0$, и из формулы (3) получаем равенство $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$.

Утверждение об этом равенстве часто называют теоремой Пифагора для трёхгранного угла.

Сохраним обозначения α, β и γ для плоских углов трёхгранного угла $OABC$, а величины двугранных углов с рёбрами OA, OB и OC обозначим $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$. Докажем теорему синусов для трёхгранного угла.

ТЕОРЕМА 2

Для трёхгранного угла $OABC$ справедливы равенства

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C},$$

т. е. синусы плоских углов трёхгранного угла пропорциональны синусам противолежащих двугранных углов.

4

Доказательство. Ограничимся доказательством справедливости пропорции

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} \qquad (4)$$

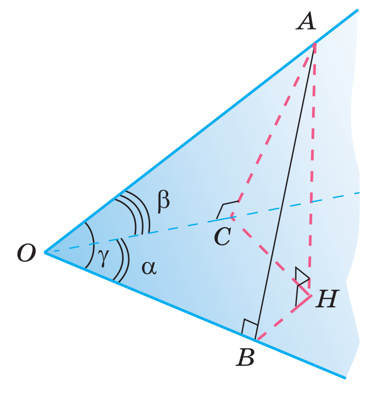
в том случае, когда основание H перпендикуляра AH к плоскости OBC лежит во внутренней области угла BOC (рис. 111); остальные случаи рассматриваются аналогично.

Будем считать, что точки B и C отмечены на рёбрах так, что $AB \perp OB$ и $AC \perp OC$. Тогда $HB \perp OB$ и $HC \perp OC$ (по теореме о трёх перпендикулярах), и, следовательно, углы ABH и ACH — линейные углы двугранных углов с рёбрами OB и OC, т. е. $\angle ABH = \angle B$ и $\angle ACH = \angle C$.

Сначала из прямоугольных треугольников ABO и ACO получаем $AB = AO \cdot \sin\gamma$ и $AC = AO \cdot \sin\beta$. Затем из прямоугольных треугольников AHB и AHC находим два выражения для AH:

$$AH = AB \cdot \sin B = AO \cdot \sin\gamma \sin B$$
и $$AH = AC \cdot \sin C = AO \cdot \sin\beta \sin C.$$

Приравнивая эти выражения и деля обе части равенства на $AO \cdot \sin B \sin C$, приходим к равенству (4). **



$AH \perp OBC$, $AB \perp OB$, $AC \perp OC$

Рис. 111

25 Многогранный угол

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку O, не лежащую в плоскости многоугольника. Проведём лучи OA_1, OA_2, ..., OA_n. Фигура, составленная из плоских углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_nOA_1, называется многогранным углом и обозначается так: $OA_1A_2...A_n$ (рис. 112). Точка O называется вершиной многогранного угла, лучи OA_1, OA_2, ..., OA_n — его рёбрами, а плоские углы OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 — гранями многогранного угла. Многогранный угол, имеющий n граней, называют также n-гранным углом.

Вершина n-угольной пирамиды является вершиной n-гранного угла, рёбра которого содержат боковые рёбра пирамиды, а каждая вершина основания пирамиды является вершиной трёхгранного угла.

Многогранный угол называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Заметим, что если многоугольник $A_1A_2...A_n$ выпуклый, то и многогранный угол $OA_1A_2...A_n$ выпуклый, и обратно.

Оказывается, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла удовлетворяет такому же неравенству, как и сумма плоских углов трёхгранного угла.

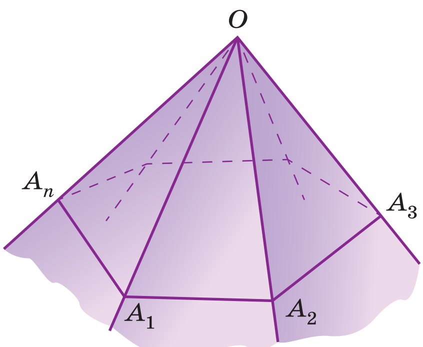
ТЕОРЕМА

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

*** Доказательство.** Обратимся к рисунку 112. Каждый плоский угол многогранного угла $OA_1A_2...A_n$ выразим через два других угла соответствующего треугольника, например:

$$\angle A_1OA_2 = 180° - (\angle OA_1A_2 + \angle OA_2A_1),$$
$$\angle A_2OA_3 = 180° - (\angle OA_2A_3 + \angle OA_3A_2),$$

и сложим все такие выражения для плоских углов. В правой части равенства слагаемое 180° повторится n раз, а остальные слагаемые, входящие со знаком «минус», сгруппируем попарно так, чтобы в каждую пару входили углы с одной и той же вершиной. Например, в одну пару вой-



Многогранный угол $OA_1A_2...A_n$

Рис. 112

4

дут (со знаком «минус») углы OA_1A_n и OA_1A_2. В результате получим равенство

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_nOA_1 = 180° \cdot n - (\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2) - \\ - (\angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3) - \ldots - (\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1). \quad (5)$$

Каждая сумма двух углов, заключённых в скобки, является суммой двух плоских углов трёхгранного угла, вершиной которого является вершина многоугольника $A_1A_2...A_n$: например, $(\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2)$ — это сумма двух плоских углов трёхгранного угла $A_1A_2A_nO$.

Согласно утверждению, доказанному на с. 98, эта сумма больше третьего плоского угла этого трёхгранного угла, т. е.

$$\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2 > \angle A_nA_1A_2.$$

Аналогичные неравенства имеют место для каждой суммы, заключённой в скобки в равенстве (5). Поэтому из равенства (5), обозначив для краткости левую часть (т. е. сумму плоских углов) буквой Σ, получим неравенство

$$\Sigma < 180° \cdot n - [\angle A_nA_1A_2 + \angle A_1A_2A_3 + \ldots + \angle A_{n-1}A_nA_1].$$

Сумма в квадратных скобках — это сумма углов выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$. Она равна $(n-2) \cdot 180°$, поэтому

$$\Sigma < 180° \cdot n - (n-2) \cdot 180° = 360°.$$

Итак, для суммы Σ плоских углов выпуклого многогранного угла мы получили искомое неравенство $\Sigma < 360°$. ∗

Вопросы и задачи

71. а) Докажите, что если все плоские углы трёхгранного угла прямые, то все двугранные углы трёхгранного угла также прямые.

б) Докажите, что не существует плоскости, перпендикулярной ко всем граням трёхгранного угла.

в)* Докажите, что если все плоские углы трёхгранного угла являются острыми и равны друг другу, то все его двугранные углы также равны друг другу.

г)* Двугранный угол при ребре OC трёхгранного угла $OABC$ — прямой, плоские углы AOB и BOC — острые, $\angle AOB = \gamma$ и $\angle BOC = \alpha$, двугранный угол при ребре OB равен $\angle B$. Выразите $\operatorname{tg}\gamma$ через α и $\angle B$.

72. а) Докажите, что если все двугранные углы трёхгранного угла прямые, то все плоские углы трёхгранного угла также прямые.

б) Докажите, что не существует плоскости, перпендикулярной ко всем граням выпуклого n-гранного угла, где $n > 3$.

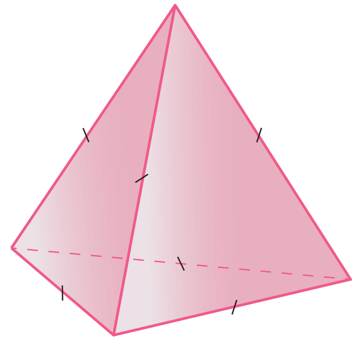
в)* Найдите косинус двугранного угла трёхгранного угла, каждый плоский угол которого равен α, где $\alpha < 90°$.

г)* Двугранный угол при ребре OC трёхгранного угла $OABC$ — прямой, плоские углы AOB и BOC — острые, $\angle BOC = \alpha$, двугранный угол при ребре OB равен $\angle B$. Выразите $\operatorname{tg}\angle AOC$ через α и $\angle B$.

§ 5

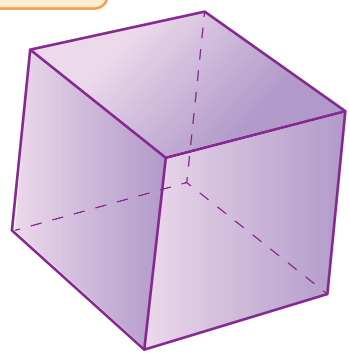
Правильные многогранники

26 Виды правильных многогранников



Правильный тетраэдр

Рис. 113



Куб

Рис. 114

Многогранник называется правильным, если он выпуклый, все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер.

Примером правильного многогранника является тетраэдр, у которого все рёбра равны друг другу. Он называется правильным тетраэдром[1] (рис. 113): этот многогранник — выпуклый, все четыре его грани — равные правильные треугольники и в каждой вершине сходятся три ребра. Другой пример правильного многогранника — куб (убедитесь в этом, рис. 114).

Рассмотрим рёбра правильного многогранника, сходящиеся в одной вершине. Для них эта вершина является общим концом. Можно доказать, что

- **другие концы этих рёбер лежат в одной плоскости.**

Мы не доказываем это утверждение, но будем им пользоваться. Из него, в частности, следует, что каждая вершина правильного многогранника является вершиной выпуклого многогранного угла, рёбра которого содержат рёбра многогранника, сходящиеся в этой вершине. Плоские углы этого многогранного угла будем называть плоскими углами правильного многогранника при данной вершине.

Оказывается, что наряду с правильным тетраэдром и кубом существуют ещё только три вида правильных многогранников. Этот факт вытекает из следующего утверждения:

- **не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geqslant 6$.**

---

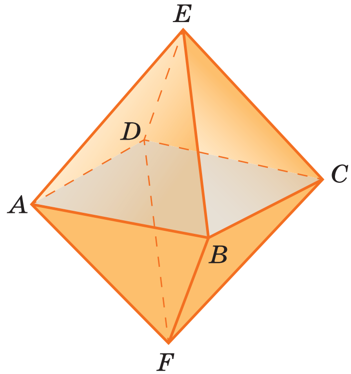
[1] Следует различать правильный тетраэдр и правильную треугольную пирамиду: в правильной треугольной пирамиде боковые рёбра равны друг другу, но они могут быть не равны рёбрам основания пирамиды.

5

* В самом деле, угол правильного n-угольника равен $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, а при каждой вершине многогранника имеется не менее трёх плоских углов, причём из теоремы п. 25 следует, что сумма плоских углов при вершине правильного многогранника меньше 360°. Поэтому если гранями правильного многогранника являются правильные n-угольники, то число n удовлетворяет неравенству

$$3\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} < 360^\circ,$$

откуда получаем $n < 6$. *

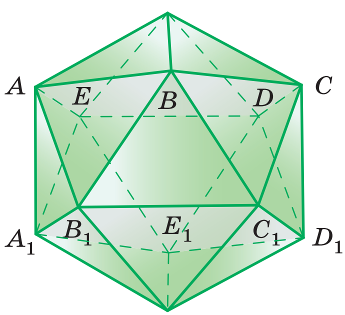


Правильный октаэдр

Рис. 115

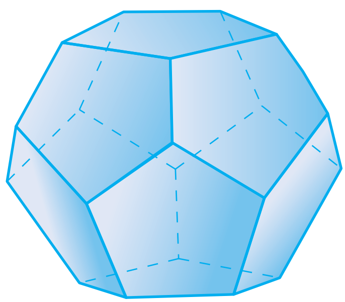
Из этого утверждения следует, что гранями правильного многогранника могут быть только правильные треугольники, правильные четырёхугольники (т. е. квадраты) и правильные пятиугольники. Кроме того, поскольку сумма плоских углов при каждой вершине правильного многогранника меньше 360°, то каждая вершина может быть вершиной либо трёх, четырёх или пяти правильных треугольников, либо трёх квадратов, либо трёх правильных пятиугольников. Получается пять возможных видов правильных многогранников. С двумя из них мы уже знакомы — это правильный тетраэдр (см. рис. 113) и куб (см. рис. 114). Можно доказать, что ещё три вида правильных многогранников также существуют. Перечислим их.

На рисунке 115 изображён правильный октаэдр. Он составлен из восьми равных правильных треугольников, и в каждой его вершине схо-



Правильный икосаэдр

Рис. 116



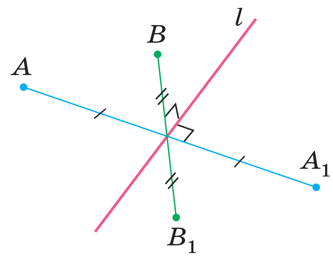
Правильный додекаэдр

Рис. 117

дятся четыре ребра. Плоскость четырёхугольника $ABCD$ разделяет октаэдр на две правильные четырёхугольные пирамиды, и таким же свойством обладают плоскости четырёхугольников $AECF$ и $BEDF$.

На рисунке 116 представлен правильный икосаэдр. Он составлен из двадцати равных правильных треугольников, и в каждой его вершине сходятся пять рёбер. Плоскости пятиугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ отсекают от правильного икосаэдра две правильные пятиугольные пирамиды. Если их приставить друг к другу так, чтобы совместились вершины A и A_1, B и B_1 и т. д., то получится выпуклый многогранник, все десять граней которого — равные правильные треугольники. Однако этот многогранник не является правильным, поскольку в каждой его вершине сходится не одно и то же число рёбер (в одних вершинах сходятся четыре ребра, а в других — пять).

На рисунке 117 изображён правильный додекаэдр. Он составлен из двенадцати равных правильных пятиугольников, и в каждой его вершине сходятся три ребра.



Точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно прямой l

Рис. 118

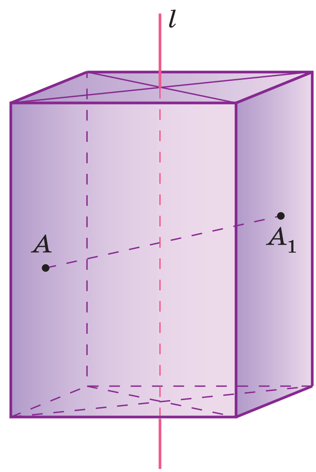
27 Симметрия правильных многогранников

Все правильные многогранники имеют оси и плоскости симметрии, а также, за исключением правильного тетраэдра, имеют центр симметрии.

Понятия оси симметрии и центра симметрии для фигур в пространстве вводятся в точности так же, как и для фигур на плоскости. Напомним эти понятия.

Две точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой l, если прямая l проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 118). Любая точка прямой l считается симметричной самой себе относительно этой прямой.

Прямая l называется осью симметрии фигуры F, если каждая точка фигуры F симметрична относительно прямой l некоторой точке этой же фигуры. На рисунке 119



Прямая l — ось симметрии прямоугольного параллелепипеда

Рис. 119

прямая l — ось симметрии прямоугольного параллелепипеда.

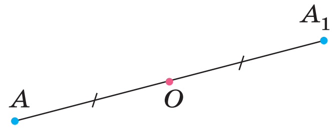
Две точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O, если точка O — середина отрезка AA_1 (рис. 120). Точка O считается симметричной самой себе относительно точки O.

Точка O называется центром симметрии фигуры F, если каждая точка фигуры F симметрична относительно точки O некоторой точке этой же фигуры. На рисунке 121 точка O — центр симметрии прямоугольного параллелепипеда.

В пространстве наряду с симметриями относительно прямой и относительно точки рассматривают симметрию относительно плоскости — её называют зеркальной симметрией.

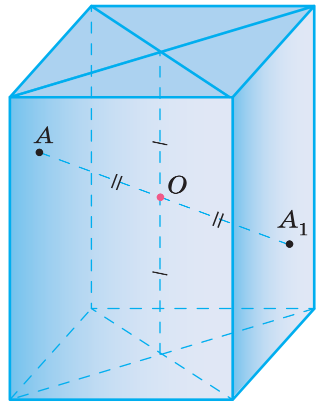
Две точки A и A_1 называются симметричными относительно плоскости α, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 122). Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости.

Плоскость α называется плоскостью симметрии фигуры F, если каждая точка фигуры F симметрична относительно плоскости α некоторой точке этой же фигуры. На рисун-



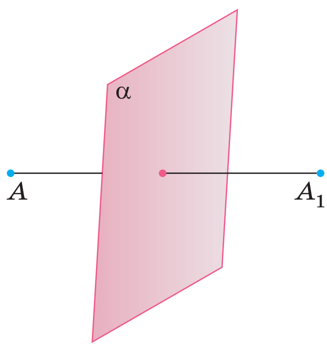
Точки A и A_1 симметричны относительно точки O

Рис. 120



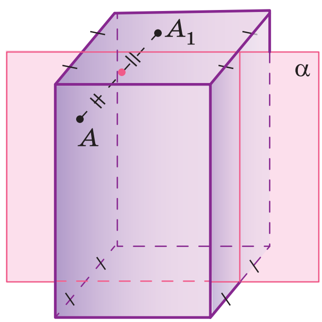
Точка O – центр симметрии прямоугольного параллелепипеда

Рис. 121



Точки A и A_1 симметричны относительно плоскости α

Рис. 122



Плоскость α – плоскость симметрии прямоугольного параллелепипеда

Рис. 123

ке 123 плоскость α — плоскость симметрии прямоугольного параллелепипеда.

Рассмотрим теперь оси, плоскости и центры симметрии правильных многогранников.

Правильный тетраэдр имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии. Каждая его ось симметрии проходит через середины двух противоположных рёбер: например, осью симметрии является прямая MN на рисунке 124.

Каждая плоскость симметрии правильного тетраэдра проходит через его ребро и середину противоположного ребра. На рисунке 125 плоскость ADM — плоскость симметрии правильного тетраэдра $ABCD$. С точки зрения наглядности симметрия правильного тетраэдра $ABCD$ относительно этой плоскости очевидна.

Менее очевидно то, что прямая MN (см. рис. 124) является осью симметрии правильного тетраэдра. Чтобы доказать это, заметим, что прямая MN является линией пересечения двух плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$ — плоскости ADM и плоскости BCN (рис. 126). Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что плоскости ADM и BCN взаимно перпендикулярны.

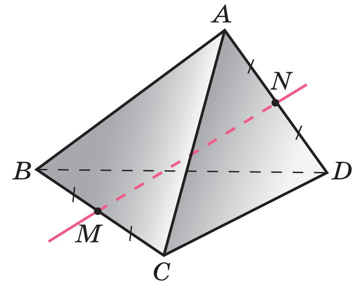
Кроме того, можно доказать (см. задачу 73 б), что

- **линия пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии фигуры является осью симметрии этой фигуры.**

Отсюда следует, что прямая MN на рисунке 124 — ось симметрии правильного тетраэдра $ABCD$.

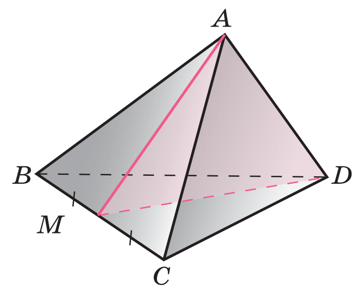
Центра симметрии у правильного тетраэдра нет (докажите это самостоятельно).

Куб имеет девять осей симметрии и девять плоскостей симметрии. Три оси симметрии — это прямые, проходящие через центры противоположных граней куба, что очевидно. Одна из этих осей (прямая a) изо-



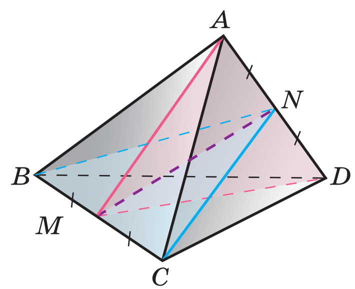
Прямая MN — ось симметрии правильного тетраэдра $ABCD$

Рис. 124



Плоскость ADM — плоскость симметрии правильного тетраэдра $ABCD$

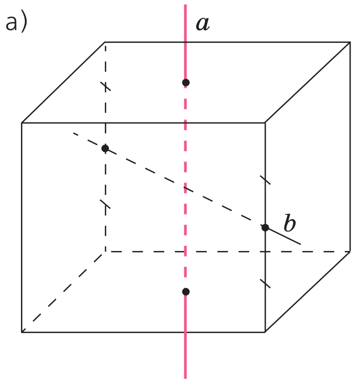
Рис. 125



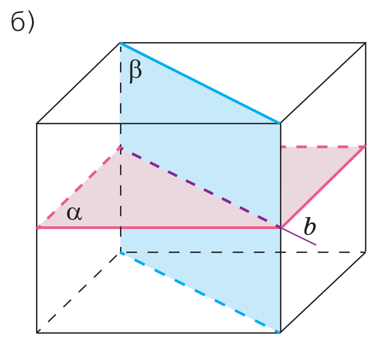
Прямая MN — линия пересечения плоскостей ADM и BCN

Рис. 126

5



Прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – оси симметрии куба

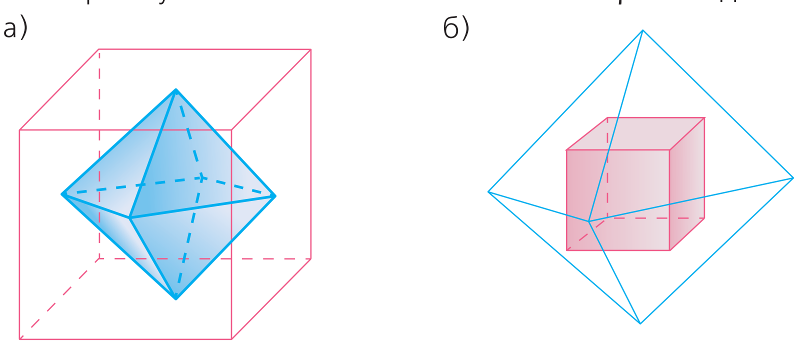


Плоскости α и β – плоскости симметрии куба. Они пересекаются по прямой $\boldsymbol{b}$

Рис. 127

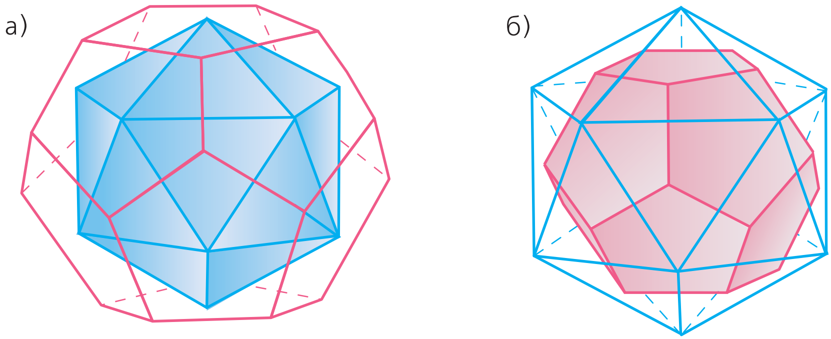
бражена на рисунке 127, *а*. Ещё шесть осей симметрии куба дают прямые, проходящие через середины параллельных рёбер, не лежащих в одной грани (у куба шесть пар таких рёбер). Одной из этих прямых является прямая $\boldsymbol{b}$ на рисунке 127, *а*. То, что прямая $\boldsymbol{b}$ — ось симметрии куба, не столь очевидно, как в случае оси $\boldsymbol{a}$. Мы вернёмся к этой прямой, рассмотрев плоскости симметрии куба.

Три плоскости симметрии куба — это плоскости, проходящие через середины параллельных рёбер куба. Одна из таких плоскостей (плоскость α) изображена на рисунке 127, *б*. Ещё шесть плоскостей симметрии дают плоскости, проходящие через параллельные диагонали противоположных граней (у куба шесть пар таких диагоналей). Одной из этих плоскостей является плоскость β на рисунке 127, *б*. С точки зрения наглядности симметрия куба относительно плоскостей α и β очевидна.



Двойственность куба и правильного октаэдра

Рис. 128



Двойственность правильных додекаэдра и икосаэдра

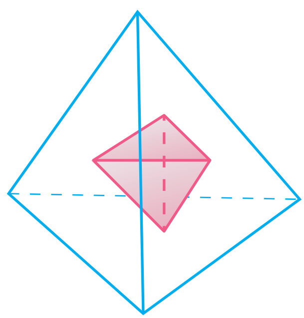
Рис. 129

Заметим теперь, что плоскости α и β на рисунке 127, *б* взаимно перпендикулярны (докажите это), а прямая b является линией пересечения этих плоскостей симметрии куба. Отсюда следует, что прямая b — ось симметрии куба. Отметим, что все девять осей симметрии куба пересекаются в одной точке — центре симметрии куба.

У правильного октаэдра, как и у куба, девять осей симметрии и девять плоскостей симметрии. Это связано с тем, что куб и правильный октаэдр — двойственные друг другу правильные многогранники. Их двойственность проявляется в следующем: если соединить центры смежных граней куба отрезками, то получится правильный октаэдр, т. е. центры шести граней куба являются вершинами правильного октаэдра, а если соединить центры смежных граней правильного октаэдра отрезками, то получится куб, т. е. центры восьми граней правильного октаэдра являются вершинами куба (рис. 128). Поэтому оси и плоскости симметрии куба являются осями и плоскостями симметрии «вписанного» в него правильного октаэдра, и наоборот. Убедитесь в этом, используя рисунок 128.

Правильные додекаэдр и икосаэдр также двойственны друг другу (рис. 129). Поэтому они имеют одинаковые элементы симметрии — у каждого из этих правильных многогранников 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

Отметим, что правильный тетраэдр двойствен самому себе: отрезки, соединяющие центры смежных граней правильного тетраэдра, являются рёбрами другого правильного тетраэдра (рис. 130).



Правильный тетраэдр двойствен самому себе

Рис. 130

Правильные многогранники называют иногда платоновыми телами в честь древнегреческого философа Платона (429—348 гг. до н. э.), хотя они были известны и до него.

28 Теорема Эйлера

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник. Обозначим число его вершин, рёбер и граней буквами В, Р и Г. Доказательство теоремы о связи между этими числами первым опубликовал Эйлер, но задолго до него её знал Декарт, записки которого были изданы лишь много лет спустя после доказательства Эйлера. К тому времени название теорема Эйлера стало уже общепринятым.

ТЕОРЕМА

Для любого выпуклого многогранника справедливо равенство

$$В - Р + Г = 2.$$

5

∗ Доказательство. Возьмём какую-нибудь плоскость α, не перпендикулярную ни к одной из граней данного выпуклого многогранника, и рассмотрим ортогональную проекцию многогранника на эту плоскость. Она представляет собой некоторый выпуклый многоугольник L' вместе с его внутренней областью (рис. 131, *а*). При этом многоугольник L' является проекцией замкнутой пространственной ломаной L, составленной из рёбер многогранника.

Ломаная L разделяет многогранник на две части — обозначим их M_1 и M_2. Проекцией части M_1 (и также части M_2) является многоугольник L' вместе с его внутренней областью, а с другой стороны, проекция части M_1 состоит из проекций граней, входящих в M_1. Фигуру, составленную из проекций этих граней, обозначим M_1' (рис. 131, *б*). Отметим, что проекция каждой грани является выпуклым многоугольником (поскольку каждая грань выпуклого многогранника — выпуклый многоугольник).

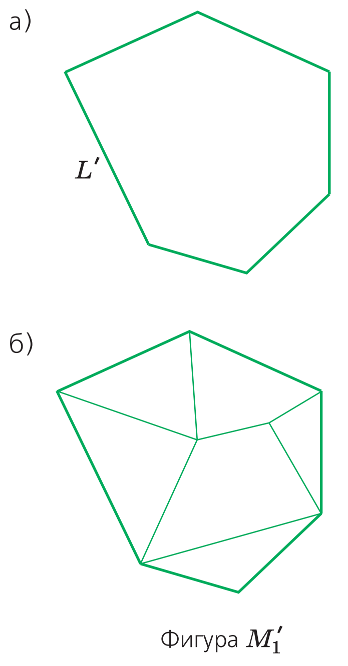


Рис. 131

Пусть часть M_1 многогранника имеет k граней с числом рёбер $n_1, n_2, ..., n_k$ и пусть $В_1$ — число вершин этой части, не принадлежащих ломаной L, а $В_2$ — число вершин ломаной L, а значит, и многоугольника L' (на рисунке 131, *б* $k = 6$, $В_1 = 2$, $В_2 = 6$). Найдём сумму углов всех многоугольников, из которых составлена фигура M_1', двумя способами.

С одной стороны, эта сумма равна

$$\sum_{i=1}^{k} 180° (n_i - 2),$$

а с другой стороны, эта же сумма равна

$$360° \cdot В_1 + 180° (В_2 - 2)$$

(объясните, как получаются эти выражения). Приравнивая два выражения для суммы углов и деля их на 180°, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 2) = 2В_1 + В_2 - 2,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - 2k = 2В_1 + В_2 - 2. \qquad (1)$$

Пусть другая часть многогранника (т. е. M_2) имеет m граней с числом рёбер $p_1, p_2, ..., p_m$ и пусть $В_3$ — число вершин этой части, не принадлежащих ломаной L. Тогда аналогично равенству (1) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i - 2m = 2В_3 + В_2 - 2. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2):

$$\left[\sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{m} p_i\right] - 2(k + m) = 2(В_1 + В_3 + В_2) - 4. \qquad (3)$$

Заметим теперь, что $k + m = Г$ — число граней многогранника, $В_1 + В_3 + В_2 = В$ — число его вершин, а сумма в квадратных скобках равна $2Р$, т. е. удвоенному числу рёбер многогранника, поскольку каждое ребро «вошло» в сумму дважды (за счёт того, что каждое ребро является стороной двух смежных граней). Таким образом, равенство (3) можно записать в виде $2Р - 2Г = 2В - 4$, откуда следует искомое равенство $В - Р + Г = 2$.

Замечание. С помощью теоремы Эйлера можно по-другому доказать утверждение на с. 103 о том, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geqslant 6$.

Пусть каждая грань правильного многогранника является n-угольником, т. е. содержит n рёбер, и пусть в каждой вершине сходятся m рёбер. Докажем, что $n < 6$.

5

По теореме Эйлера В − Р + Г = 2, где В, Р и Г — числа вершин, рёбер и граней многогранника. Так как каждая грань имеет n рёбер, а каждое ребро принадлежит двум (смежным) граням, то $Г \cdot n = 2Р$, откуда

$$Г = \frac{2Р}{n}.$$

Аналогично так как в каждой вершине сходятся m рёбер, а каждое ребро соединяет две вершины, то $В \cdot m = 2Р$, откуда

$$В = \frac{2Р}{m}.$$

Подставляя полученные выражения для Г и В в формулу Эйлера, приходим к равенству

$$\frac{2Р}{m} - Р + \frac{2Р}{n} = 2,$$

из которого, деля на 2Р, получаем

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{Р} > \frac{1}{2}.$$

Так как $m \geqslant 3$, то $\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{3}$, и, следовательно,

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

т. е. $n < 6$, что и доказывает утверждение. *

Вопросы и задачи

73. а) Верно ли утверждение: «Правильный тетраэдр является правильной треугольной пирамидой»? Верно ли обратное утверждение? Ответы обоснуйте.

б)* Докажите, что линия пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии фигуры является осью симметрии этой фигуры.

в) Найдите угол между двумя рёбрами правильного октаэдра, имеющими общую вершину и принадлежащими разным граням.

г) Докажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

д) Найдите косинус двугранного угла правильного октаэдра.

е)* Докажите, что центры граней правильного додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра.

ж)* Найдите косинус двугранного угла правильного икосаэдра.

74. а)* Верно ли утверждение: «Если все грани многогранника — равные друг другу квадраты, то этот многогранник — правильный»? Ответ обоснуйте.

б)* Фигура имеет три попарно перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся в одной точке. Докажите, что эта точка — центр симметрии фигуры.

в)* Найдите угол между двумя рёбрами правильного икосаэдра, имеющими общую вершину и принадлежащими разным граням.
г) Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба.
д) Докажите, что сумма двугранного угла правильного тетраэдра и двугранного угла правильного октаэдра равна 180°.
е)* Докажите, что центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.
ж)* Найдите косинус двугранного угла правильного додекаэдра.

Вопросы для повторения

1. Объясните, какая фигура называется геометрическим телом.

2. Объясните, что означают слова: «Задано отображение пространства на себя».

3. Дайте определение движения пространства.

4. Дайте определение и приведите примеры равных фигур в пространстве.

5. Объясните, какая поверхность называется многогранником и что такое грани, рёбра, вершины, смежные грани и диагонали многогранника.

6. Какой многогранник называется выпуклым? Приведите примеры выпуклых многогранников.

7. Расскажите, как измеряются объёмы тел. Что такое кубический сантиметр?

8. Перечислите основные свойства объёмов тел.

9. Докажите, что объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

10. Объясните, какой многогранник называется n-угольной призмой и что такое основания, боковые грани, боковая поверхность, боковые рёбра и высота призмы.

11. Какая призма называется прямой? наклонной? правильной? Каким свойством обладают грани правильной призмы?

12. Сформулируйте и докажите теорему об объёме призмы.

13. Объясните, какой многогранник называется параллелепипедом. Что представляют собой его грани?

14. Какие грани параллелепипеда называются противоположными? Каким свойством они обладают? Докажите утверждение об этом свойстве.

15. Объясните, что такое основания, боковые грани и боковые рёбра параллелепипеда. Какой параллелепипед называется прямым?

16. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

17. Объясните, какой многогранник называется n-угольной пирамидой и что такое основание, боковые грани, боковая поверхность, боковые рёбра, вершина и высота пирамиды.

18. Объясните, какая пирамида называется правильной. Докажите, что все боковые рёбра правильной пирамиды равны и все её боковые грани также равны. Что такое апофема правильной пирамиды?

19. Объясните, какой многогранник называется усечённой пирамидой и что такое основания, боковые грани, боковая поверхность, боковые рёбра и высота усечённой пирамиды.

20. Докажите, что боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

5

21. Какая усечённая пирамида называется правильной? Докажите, что основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции. Что такое апофема правильной усечённой пирамиды?

22. Выведите формулу, связывающую площади оснований треугольной усечённой пирамиды.

23. Выведите формулу Архимеда

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

где n — любое натуральное число. Используя эту формулу, докажите, что

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] > \frac{1}{3} - \frac{1}{n}.$$

24. Сформулируйте и докажите* теорему об объёме пирамиды.

25. Выведите формулу объёма усечённой пирамиды.

26. Объясните, какая фигура называется трёхгранным углом и что такое вершина, рёбра, грани, плоские и двугранные углы трёхгранного угла.

27*. Докажите, что сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360°.

28*. Докажите, что каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

29.** Сформулируйте и докажите теорему косинусов для трёхгранного угла.

30.** Сформулируйте и докажите теорему Пифагора для трёхгранного угла.

31.** Сформулируйте и докажите теорему синусов для трёхгранного угла.

32. Объясните, какая фигура называется многогранным углом и что такое вершина и грани многогранного угла. Какой многогранный угол называется выпуклым?

33*. Докажите теорему: сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

34. Какой многогранник называется правильным?

35. Каким свойством обладают те концы рёбер правильного многогранника, сходящихся в одной вершине, которые отличны от этой вершины?

36*. Докажите, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники, где $n \geqslant 6$.

37. Сколько видов правильных многогранников существует? Назовите их. Что представляют собой эти многогранники и сколько граней имеет каждый из них?

38. Объясните, какие две точки называются симметричными относительно данной прямой и какая прямая называется осью симметрии фигуры.

39. Объясните, какие две точки называются симметричными относительно данной точки и какая точка называется центром симметрии фигуры.

40. Объясните, какие две точки называются симметричными относительно данной плоскости и какая плоскость называется плоскостью симметрии фигуры.

41*. Докажите, что линия пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии фигуры является осью симметрии этой фигуры.

42. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильный тетраэдр? Объясните, как расположены эти оси и плоскости по отношению к тетраэдру.

43. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет куб? Объясните, как расположены эти оси и плоскости по отношению к кубу.

44. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильный октаэдр? правильный додекаэдр? правильный икосаэдр?

45. Какие правильные многогранники имеют центр симметрии?

46. Сформулируйте и докажите* теорему Эйлера о соотношении между числами вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника.

Дополнительные задачи

§ 3

75. Нарисуйте изображение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которой является трапеция с основаниями AD и BC, и постройте изображение линии пересечения плоскостей ABB_1 и DCC_1.

76. Постройте изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если задано изображение точек:
а) A, B, C и D_1;
б) A, B_1, C и D_1.

77. Может ли сечением параллелепипеда быть правильный пятиугольник? Ответ обоснуйте.

78. Может ли сечением правильной шестиугольной призмы быть правильный пятиугольник? Ответ обоснуйте.

79. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если площади трёх его граней, имеющих общую вершину, равны S_1, S_2 и S_3.

5

80. Плоскость каждой грани одного выпуклого многогранника является плоскостью грани другого выпуклого многогранника, и наоборот. Могут ли эти многогранники не совпадать? Ответ обоснуйте.

81. Докажите, что объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от плоскости этой грани до параллельного ей ребра.

82. Нарисуйте изображение пирамиды $PABCD$, основанием которой является трапеция с основаниями AD и BC, и постройте изображение линии пересечения плоскостей PAB и PCD.

83. Докажите, что число рёбер многогранника:
а) не может быть равно 7;
б) может быть равно 6 и любому числу, большему 7.

84. Разрежьте куб:
а) на три четырёхугольные пирамиды;
б) на пять тетраэдров.

85. Разрежьте треугольную призму на три тетраэдра равных объёмов.

86. Докажите, что объём тетраэдра AB_1CD_1 равен одной трети объёма параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

87. Докажите, что объём тетраэдра равен $\frac{2}{3a}S_1S_2\sin\alpha$, где S_1 и S_2 — площади двух его граней, a — длина общего ребра этих граней, α — угол между ними.

88. Докажите, что объём тетраэдра $ABCD$, в котором $\angle BAD = \alpha$ и $\angle CAD = \beta$, равен $\frac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD \sin\alpha \sin\beta \sin\theta$, где θ — двугранный угол с ребром AD.

89. Докажите, что объём усечённой пирамиды с высотой h и площадями оснований S_1 и S_2 равен $\frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$.

90. Докажите, что $\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1$, где d_1, d_2, d_3, d_4 — расстояния от произвольной точки, лежащей внутри тетраэдра, до плоскостей его граней, h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра, проведённые к этим граням.

91. На грани ABC тетраэдра $ABCD$ отмечена произвольная точка M, через которую проведены прямые, параллельные рёбрам DA, DB, DC и пересекающие грани тетраэдра в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\frac{MA_1}{DA} + \frac{MB_1}{DB} + \frac{MC_1}{DC} = 1.$$

§ 4

92. Докажите, что три плоскости, каждая из которых проходит через одно из рёбер трёхгранного угла и биссектрису противолежащего плоского угла, имеют общую прямую.

93. Докажите, что:
а) три полуплоскости, каждая из которых делит пополам двугранный угол трёхгранного угла, имеют общий луч;
б) каждая точка этого луча равноудалена от плоскостей граней трёхгранного угла.

94. Из точки P, равноудалённой от плоскостей граней трёхгранного угла $OABC$, проведены перпендикуляры к этим плоскостям. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат в плоскости, перпендикулярной к прямой OP.

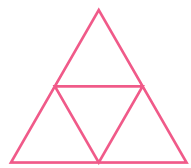


Рис. 132

§ 5

95. На рисунке 132 изображена развёртка правильного тетраэдра. Перерисуйте её в большем масштабе на плотный лист бумаги, вырежите и склейте тетраэдр.

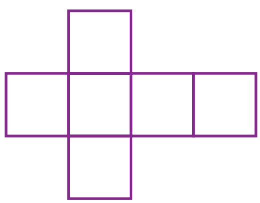


Рис. 133

96. На рисунке 133 изображена развёртка куба. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежите и склейте куб.

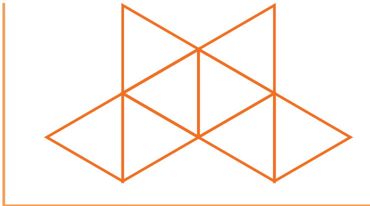


Рис. 134

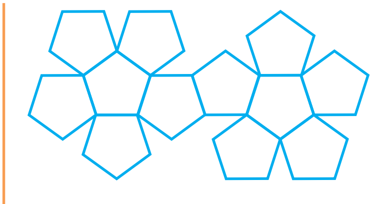


Рис. 135

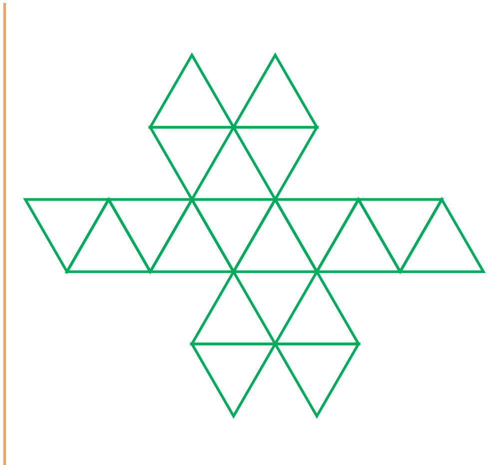


Рис. 136

5

97. На рисунке 134 изображена развёртка правильного октаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежите и склейте октаэдр.

98. На рисунке 135 изображена развёртка правильного додекаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежите и склейте додекаэдр.

99. На рисунке 136 изображена развёртка правильного икосаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги, вырежите и склейте икосаэдр.

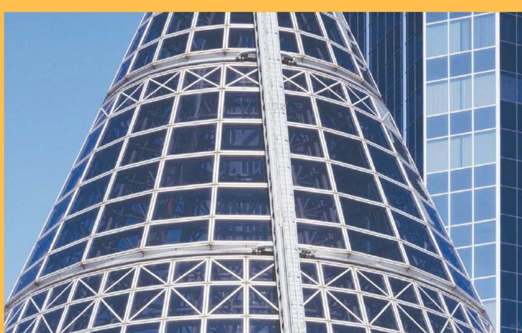
100. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного многогранника, до его граней не зависит от расположения этой точки.

Глава 3

Тела и поверхности вращения

В этой главе мы будем рассматривать тела, поверхности которых в отличие от многогранников составлены не из многоугольников, а могут быть получены путём вращения некоторых линий вокруг прямой. Отсюда и название — тела и поверхности вращения. К таким телам относятся цилиндр, конус и шар, о них и пойдёт речь в данной главе.

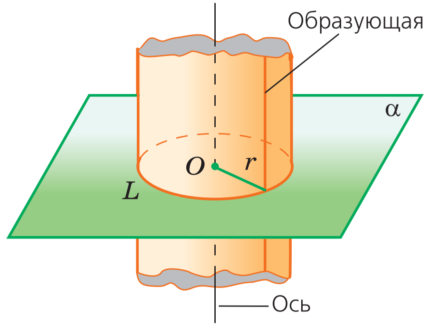
Всем нам знакомы многие предметы, имеющие форму этих тел: например, консервная банка имеет форму цилиндра, а футбольный мяч — форму шара. Мы рассмотрим свойства цилиндра, конуса, шара и выведем формулы, по которым можно вычислить объёмы этих тел и площади их поверхностей. Как и в случае многогранников, эти формулы нужны не только в геометрии, но и в практической деятельности.



§6

Цилиндр и конус

29 Цилиндр



Цилиндрическая поверхность

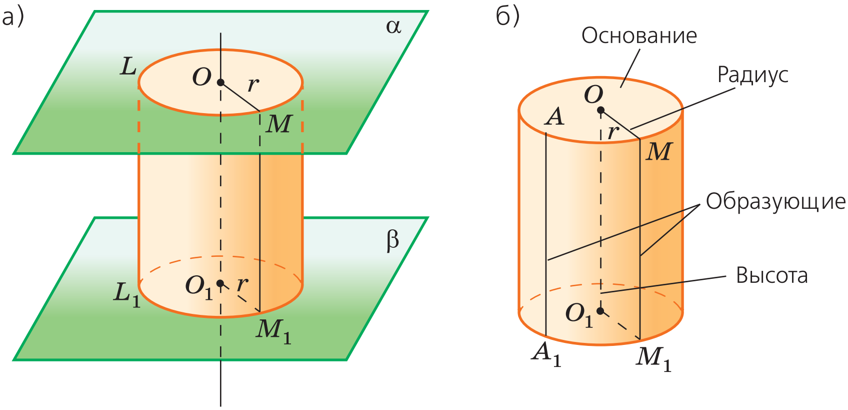
Рис. 137

Рассмотрим окружность L с центром O радиуса r, лежащую в плоскости α. Через каждую её точку проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α (рис. 137). Поверхность, образованная всеми проведёнными прямыми, называется цилиндрической поверхностью, сами эти прямые — образующими цилиндрической поверхности, а прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α, — осью цилиндрической поверхности. По построению ось и все образующие перпендикулярны к плоскости α, поэтому они параллельны и расстояние между осью и любой образующей равно r.

6

Отметим на оси цилиндрической поверхности произвольную точку O_1, не лежащую в плоскости α, и проведём через неё плоскость β, перпендикулярную к оси (рис. 138, *а*) и, следовательно, параллельную плоскости α. Линия пересечения плоскости β с цилиндрической поверхностью (обозначим её L_1) представляет собой окружность с центром O_1 радиуса r.

В самом деле, любая точка M_1 этой окружности лежит как в плоскости β, так и на одной из образующих цилиндрической поверхности (образующая MM_1 на рисунке 138, *а*), и обратно: общая точка плоско-



$\alpha \perp OO_1$, $\beta \perp OO_1$

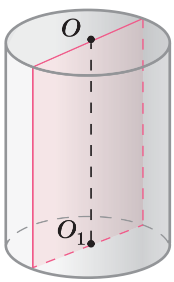
Цилиндр

Рис. 138

сти β и цилиндрической поверхности лежит на указанной окружности (докажите это самостоятельно).

Итак, плоскость β и цилиндрическая поверхность пересекаются по окружности L_1. Окружности L и L_1 являются границами двух кругов. Тело, ограниченное двумя указанными кругами и частью цилиндрической поверхности, заключённой между этими кругами, называется цилиндром, круги — основаниями цилиндра, а часть цилиндрической поверхности, заключённая между ними, называется боковой поверхностью цилиндра. Отрезок образующей, заключённый между основаниями (например, отрезки AA_1 и MM_1 на рисунке 138, *б*), называется образующей цилиндра, радиус основания — радиусом цилиндра. Очевидно, что все образующие цилиндра и отрезок OO_1 равны друг другу, — длина каждого из них равна расстоянию между плоскостями оснований. Это расстояние (и также отрезок OO_1) называется высотой цилиндра. Прямую OO_1 (ось цилиндрической поверхности) называют также осью цилиндра.

Плоскость, проходящая через ось цилиндра, пересекает его по прямоугольнику, сторонами которого являются две образующие цилиндра и диаметры его оснований. Этот прямоугольник называется осевым сечением цилиндра (рис. 139). Заметим, что цилиндр может быть получен вращением своего осевого сечения вокруг оси. Тела, которые получаются вращением своего сечения, называются телами вращения, а ограничивающие их поверхности — поверхностями вращения.



Осевое сечение цилиндра. Цилиндр получается при вращении осевого сечения вокруг оси

Рис. 139

Отметим, что

- **ось цилиндра является его осью симметрии, а любая плоскость, проходящая через ось, является плоскостью симметрии цилиндра** (докажите это самостоятельно).

Если секущая плоскость параллельна плоскости основания цилиндра, то она отсекает от него тело, также являющееся цилиндром. Поэтому сечение в этом случае представляет собой круг, радиус которого равен радиусу цилиндра.

30 Площадь поверхности и объём цилиндра

На рисунке 140, *а* изображён цилиндр, радиус которого равен r, а высота равна h. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей AB и развернули таким образом, что получился прямоугольник $ABB'A'$, стороны AB и $A'B'$ которого являются двумя краями разреза боковой поверхности цилиндра (рис. 140, *б*). Этот прямоугольник называется развёрткой боковой поверхности цилиндра. Сторона AA' прямоугольника равна длине окружности основания, а сторона AB равна высоте цилиндра, т. е. $AA' = 2\pi r$, $AB = h$.

Площадью боковой поверхности цилиндра называется площадь её развёртки. Площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, поэтому для площади $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра верна формула

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh.$$

Таким образом,

площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

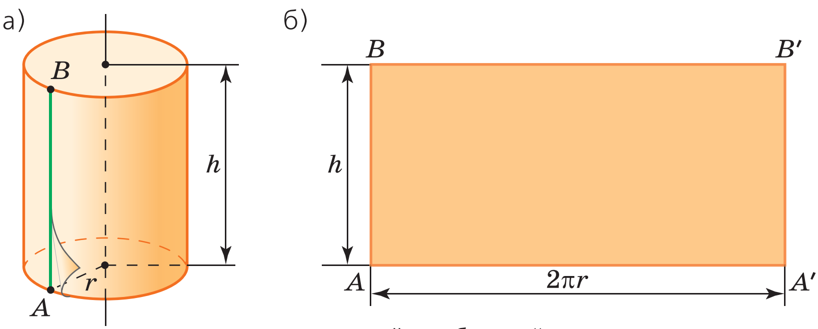
Площадь $S_{\text{цил}}$ всей поверхности цилиндра равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований, т. е.

$$S_{\text{цил}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

Докажем теперь теорему об объёме цилиндра.

ТЕОРЕМА

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



Развёртка боковой поверхности цилиндра

Рис. 140

Доказательство. Рассмотрим цилиндр радиуса r и высоты h, а также прямоугольный параллелепипед P той же высоты h, основанием которого является квадрат со стороной, равной единице измерения отрезков (рис. 141).

Параллелепипед P и его части укладываются в цилиндре столько раз, сколько раз квадрат со стороной 1 и его части укладываются в основании цилиндра, т. е. πr^2 раз. Следовательно, объём V цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т. е.

$$V = \pi r^2 h.$$

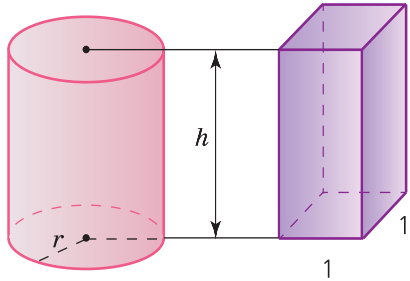


Рис. 141

31 Конус

Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP, перпендикулярную к плоскости окружности L. Через каждую точку M окружности L проведём прямую MP. Поверхность, образованная всеми проведёнными прямыми, называется <u>конической поверхностью</u> (рис. 142), а сами эти прямые — <u>образующими конической поверхности</u>. Точка P называется <u>вершиной конической поверхности</u>, а прямая PO — <u>осью конической поверхности</u>.

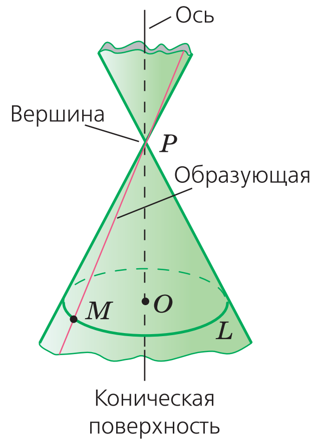


Рис. 142

Тело, ограниченное кругом с границей L и частью конической поверхности, заключённой между этим кругом и вершиной, называется <u>конусом</u>. Указанная часть конической поверхности называется <u>боковой поверхностью конуса</u>, а круг с границей L — <u>основанием конуса</u>.

Точка P называется <u>вершиной конуса</u>, а отрезки образующих, заключённые между вершиной и основанием конуса, — <u>образующими конуса</u> (например, отрезки PA и PB на рисунке 143). Все образующие конуса равны друг другу, поскольку являются гипотенузами равных

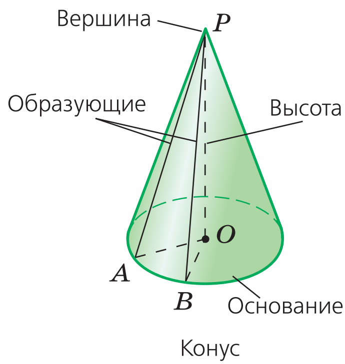
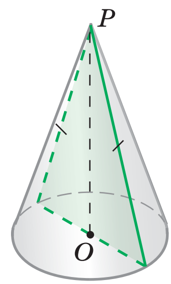


Рис. 143



Осевое сечение конуса

Рис. 144

прямоугольных треугольников (на рисунке 143 образующие PA и PB — гипотенузы равных прямоугольных треугольников POA и POB).

Отрезок PO, соединяющий вершину конуса с центром его основания, называется высотой конуса. По построению высота конуса перпендикулярна к его основанию. Прямую PO (ось конической поверхности) называют также осью конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а боковые стороны — образующие конуса (рис. 144). Этот треугольник называется осевым сечением конуса. Заметим, что конус может быть получен вращением своего осевого сечения вокруг оси.

Отметим также, что

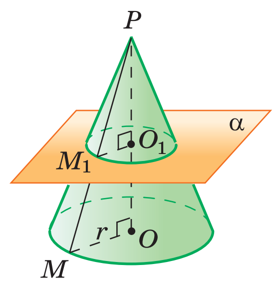
ось конуса является его осью симметрии, а любая плоскость, проходящая через ось, является плоскостью симметрии конуса.

Рассмотрим теперь сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к оси PO конуса и пересекающей ось в точке O_1 (рис. 145). Докажем, что сечением является круг с центром O_1 радиуса

$$r_1 = \frac{PO_1}{PO} r,$$

где r — радиус основания конуса.

Пусть M_1 — произвольная общая точка плоскости α и боковой поверхности конуса. Проведём через точку M_1 образующую PM конуса. Прямоугольные треугольники PO_1M_1 и POM по-



Сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к оси PO

Рис. 145

добны (так как имеют общий острый угол с вершиной P), поэтому

$$\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PO_1}{PO},$$

откуда получаем

$$O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO}r,$$

т. е. общая точка M_1 секущей плоскости α и боковой поверхности конуса лежит на окружности с центром O_1 радиуса $r_1 = \frac{PO_1}{PO}r$.

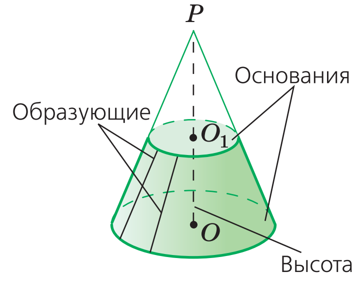


Рис. 146

Докажем, что верно и обратное: произвольная точка M_1, лежащая в плоскости α на окружности с центром O_1 радиуса $r_1 = \frac{PO_1}{PO}r$ (т. е. $O_1M_1 = r_1$), лежит также на боковой поверхности конуса.

Проведём прямую PM_1 и обозначим буквой M точку пересечения этой прямой с плоскостью основания конуса. Из подобия треугольников PO_1M_1 и POM следует пропорция

$$\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PO_1}{PO},$$

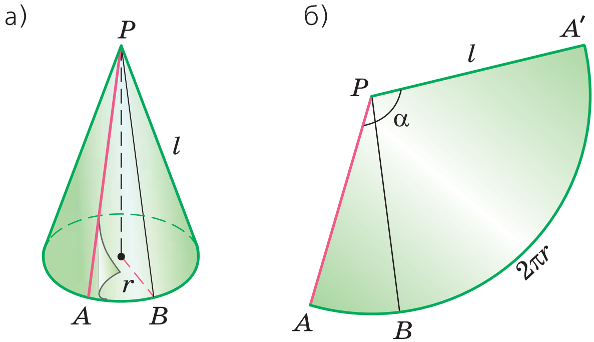
откуда получаем

$$OM = \frac{PO}{PO_1}O_1M_1 = \frac{PO}{PO_1}r_1 = r.$$

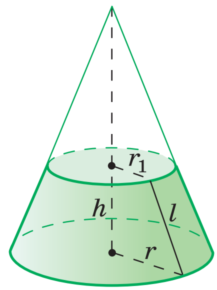
Это означает, что отрезок PM, на котором лежит точка M_1, является образующей конуса, и, следовательно, точка M_1 лежит на боковой поверхности конуса.

Проведённые рассуждения показывают, что сечением боковой поверхности конуса плоскостью α является окружность с центром O_1 радиуса r_1, поэтому сечение конуса плоскостью α представляет собой круг, ограниченный этой окружностью, что и требовалось доказать.

Секущая плоскость, перпендикулярная к оси конуса, разбивает его на две части, одна из которых представляет собой конус, а другая называется усечённым конусом (рис. 146). Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении, называются основаниями усечённого конуса, а отрезок, соединяющий центры оснований, — его высотой. Часть конической поверхности, заключённая между основаниями усечённого конуса, называется его боковой поверхностью, а отрезки образующих, из которых она составлена, — образующими усечённого конуса. Все образующие усечённого конуса равны друг другу (каждая из них равна разности образующих исходного и отсечённого конусов).



Развёртка боковой поверхности конуса



$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l$

Рис. 147

Рис. 148

32 Площадь поверхности и объём конуса

Рассмотрим конус, радиус основания которого равен r, а образующая равна l (рис. 147, *а*). Его боковую поверхность можно развернуть на плоскость, разрезав по одной из образующих. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор (рис. 147, *б*), радиус которого равен образующей конуса, т. е. равен l, а длина дуги окружности равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$. С другой стороны, если градусная мера этой дуги равна α градусов, то длина дуги равна $\frac{\pi l}{180}\alpha$. Следовательно, $\frac{\pi l}{180}\alpha = 2\pi r$, откуда $\alpha = \frac{360r}{l}$.

Площадью боковой поверхности конуса называется площадь её развёртки. Так как площадь сектора, ограниченного дугой с градусной мерой α градусов, равна $\frac{\pi l^2}{360}\alpha$ и $\alpha = \frac{360r}{l}$, то для площади $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности конуса получаем формулу $S_{\text{бок}} = \pi rl$.

Итак,

площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую конуса.

Площадь $S_{\text{кон}}$ всей поверхности конуса равна сумме площадей боковой поверхности и основания, т. е.

$$S_{\text{кон}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$

Усечённый конус получается путём отсечения одного конуса от другого, поэтому площадь боковой поверхности усечённого конуса равна разности площадей боковых поверхностей исходного и отсечённого конусов (рис. 148). Исходя из этого, выведите самостоятельно следующую формулу для площади $S_{бок}$ боковой поверхности усечённого конуса:

$$S_{бок} = \pi (r + r_1) l,$$

где r и r_1 — радиусы оснований усечённого конуса, l — длина его образующей.

Площадь S всей поверхности усечённого конуса равна сумме площадей боковой поверхности и оснований, т. е.

$$S = \pi (r + r_1) l + \pi r^2 + \pi r_1^2 = \pi [r (r + l) + r_1 (r_1 + l)].$$

Перейдём теперь к теореме об объёме конуса.

ТЕОРЕМА

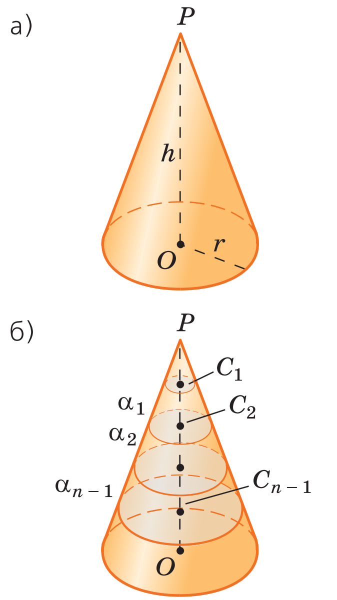
Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

∗ Доказательство. Рассмотрим конус с радиусом основания r и высотой $PO = h$ (рис. 149, *а*) и докажем, что его объём V равен $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Разобьём отрезок PO на n равных отрезков точками $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и проведём через эти точки плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, перпендикулярные к оси PO (рис. 149, *б*). Так как $PC_k = \frac{k}{n} PO$, то $\frac{PC_k}{PO} = \frac{k}{n}$, а сечение конуса плоскостью α_k представляет собой круг радиуса $\frac{k}{n} r$ (см. с. 124). Проведённые плоскости разбивают конус на n тел, первое из которых — конус, а остальные тела — усечённые конусы, причём высота каждого из них равна $\frac{h}{n}$. Объём k-го из этих тел меньше объёма цилиндра с радиусом $\frac{k}{n} r$ и высотой $\frac{h}{n}$ (k-е тело содержится в таком цилиндре), т. е. меньше $\pi \frac{r^2 h}{n^3} k^2$.

Сложив эти значения и пользуясь неравенством Архимеда (см. с. 90), для объёма V конуса получим неравенство

$$V < \pi r^2 h \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) < \pi r^2 h \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right).$$



Плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, перпендикулярные к оси PO, разбивают конус на n тел

Рис. 149

Поскольку $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то правая часть этого неравенства при $n \to \infty$ стремится к $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Следовательно, $V \leqslant \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

С другой стороны, объём первого из указанных n тел (конуса) больше нуля, а объём k-го тела при $k > 1$ (усечённого конуса) больше объёма цилиндра с радиусом $\frac{k-1}{n}r$ и высотой $\frac{h}{n}$ (такой цилиндр содержится в k-м теле), т. е. больше $\pi\frac{r^2 h}{n^3}(k-1)^2$. Поэтому (используем второе неравенство Архимеда)

$$V > \pi r^2 h \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] > \pi r^2 h\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right).$$

При $n \to \infty$ правая часть неравенства также стремится к $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Следовательно, $V \geqslant \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Таким образом, для объёма V конуса мы получили два неравенства: $V \leqslant \frac{1}{3}\pi r^2 h$ и $V \geqslant \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Отсюда следует, что $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. *

Исходя из того что усечённый конус получается отсечением одного конуса от другого (см. рис. 148), нетрудно вывести (сделайте это самостоятельно) следующую формулу объёма V усечённого конуса.

6

СЛЕДСТВИЕ

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(r^2 + r_1^2 + rr_1\right) \cdot h,$$

где r и r_1 — радиусы оснований усечённого конуса, h — его высота.

Обратите внимание на сходство формул объёмов конуса и усечённого конуса с формулами объёмов пирамиды и усечённой пирамиды.

Вопросы и задачи

101. а) Высота цилиндра равна 2 см, диагональ осевого сечения цилиндра равна 4 см. Найдите угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра.

б) Высота цилиндра равна 3 см, а диагональ осевого сечения равна 5 см. Найдите площадь основания цилиндра.

в) Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает основание цилиндра по хорде, равной 10. Расстояние от оси цилиндра до этой плоскости равно 12. Найдите радиус цилиндра.

г) Через две образующие цилиндра проведена секущая плоскость. Площадь сечения в 4 раза меньше площади осевого сечения, а площадь основания цилиндра равна 36π. Найдите расстояние между указанными образующими.

д) Докажите, что плоскость, параллельная оси цилиндра и удалённая от неё на расстояние, меньшее радиуса цилиндра, проходит через две образующие цилиндра.

е) Докажите, что любая плоскость, проходящая через ось цилиндра, является плоскостью симметрии цилиндра.

ж) Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Площадь меньшего из двух сечений равна S, угол между секущими плоскостями равен 60°. Найдите площадь осевого сечения.

з)* Цилиндр описан около призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (т. е. все боковые рёбра призмы являются образующими цилиндра). Докажите, что сумма градусных мер двугранных углов ABB_1C и ADD_1C равна 180°.

и)* В области, ограниченной цилиндрической поверхностью, проведена прямая a, параллельная оси и удалённая от неё на 5 см. Плоскость, проходящая через прямую a, пересекает цилиндрическую поверхность по прямым, находящимся на расстояниях 9 см и 16 см от прямой a. Найдите радиус цилиндрической поверхности.

102. а) Угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра равен α, диагональ осевого сечения равна d. Найдите диаметр основания цилиндра.

б) Площадь основания цилиндра относится к площади его осевого сечения как $\pi : 3$, радиус цилиндра равен 2 см. Найдите диагональ осевого сечения этого цилиндра.

в) Радиус цилиндра равен 5, высота равна 3, а площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси, равна 18. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

г) Через две образующие цилиндра проведена секущая плоскость, расстояние от которой до оси цилиндра равно 15 см, площадь сечения в 4 раза меньше площади осевого сечения. Найдите площадь основания цилиндра.

д) Докажите, что плоскость, параллельная оси цилиндра и удалённая от неё на расстояние, равное радиусу цилиндра, содержит образующую цилиндра, и притом только одну (в этом случае плоскость называется касательной плоскостью к цилиндру).

е) Докажите, что плоскость, проходящая через середину образующей цилиндра перпендикулярно к ней, является плоскостью симметрии цилиндра.

ж) Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Площадь осевого сечения равна S, угол между секущими плоскостями равен 30°. Найдите площадь второго сечения.

з)* Цилиндр вписан в призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (т. е. основания цилиндра вписаны в основания призмы). Докажите, что сумма площадей граней ABB_1A_1 и CDD_1C_1 равна сумме площадей граней BCC_1B_1 и ADD_1A_1.

и)* Вне области, ограниченной цилиндрической поверхностью, проведена прямая a, параллельная оси и удалённая от неё на 17 см. Плоскость, проходящая через прямую a, пересекает цилиндрическую поверхность по двум прямым, находящимся на расстояниях 9 см и 25 см от прямой a. Найдите радиус цилиндрической поверхности.

103. а) Угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра равен α, радиус цилиндра равен R. Найдите стороны развёртки боковой поверхности цилиндра.

б) В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна a, а высота равна h, вписан цилиндр. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

в) В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна a, а высота равна h, вписан цилиндр. Найдите объём цилиндра.

г) Найдите площадь основания цилиндра, площадь боковой поверхности которого равна 6 см^2, а объём равен 3 см^3.

д) Ребром двугранного угла, равного 60°, является ось цилиндра. Найдите объём части цилиндра, заключённой внутри этого угла, если радиус цилиндра равен 3 см, а его высота равна 2 см.

е) Площади боковых поверхностей треугольной призмы и цилиндра, вписанного в эту призму, относятся как 5 : 2. Найдите объём цилиндра, если объём призмы равен 15 см^3.

ж)* Цилиндр вписан в призму $ABCA_1B_1C_1$. Найдите объём тела, поверхность которого закрашена (рис. 150), если объём цилиндра равен V, а $\angle A = 2\alpha$.

з)* Докажите, что при $n \to \infty$ площадь боковой поверхности правильной 2^n-угольной призмы, вписанной в данный цилиндр, стремится к площади боковой поверхности этого цилиндра.

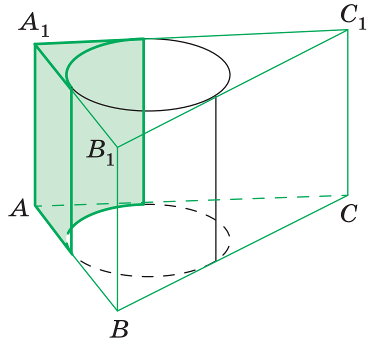


Рис. 150

104. а) Угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра равен α, высота цилиндра равна h. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

б) Около правильной треугольной призмы, высота основания которой равна h, а боковое ребро равно b, описан цилиндр. Найдите площадь всей поверхности цилиндра.

в) Около правильной треугольной призмы, высота основания которой равна a, а боковое ребро равно b, описан цилиндр. Найдите объём цилиндра.

г) Найдите площадь поверхности цилиндра, площадь боковой поверхности которого равна 10 см^2, а объём равен 5 см^3.

6

д) Плоскость, проходящая через две образующие цилиндра, отсекает от его основания дугу в 30°. Найдите объёмы частей, на которые эта плоскость делит цилиндр, если радиус цилиндра равен 2 см, а его высота равна 3 см.
е) Объёмы треугольной призмы и цилиндра, вписанного в эту призму, относятся как 5 : 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь боковой поверхности призмы равна 15 см^2.
ж)* Из треугольной призмы вырезан вписанный в неё цилиндр с объёмом V. Найдите объём оставшейся фигуры, если два угла основания призмы равны 2α и 2β.
з)* Докажите, что при $n \to \infty$ объём правильной 2^n-угольной призмы, вписанной в данный цилиндр, стремится к объёму этого цилиндра.

105. а) Докажите, что все прямые, содержащие образующие конуса, образуют равные углы с плоскостью основания конуса.
б) Радиус основания конуса равен 3, образующая конуса равна 5. Найдите высоту конуса.
в) Найдите отношение площади основания конуса к площади сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к его высоте и проходящей через её середину.
г) Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с площадью S. Найдите площадь основания конуса.
д) Площади оснований усечённого конуса равны 64π см^2 и 9π см^2, а его образующая равна 13 см. Найдите объём цилиндра, одним основанием которого является основание этого усечённого конуса, а другое основание принадлежит другому основанию усечённого конуса.
е) Отрезки PA и PB — образующие конуса, центр основания не лежит на отрезке AB. Докажите, что отрезок AB меньше диаметра основания.
ж)* Докажите, что угол между двумя образующими конуса, не лежащими в одной плоскости с осью конуса, меньше угла между образующими в осевом сечении конуса.
з)* Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 20 см. Через вершину этого конуса под углом в 60° к плоскости основания проведена плоскость. Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.
и)* Через середину образующей усечённого конуса проведена секущая плоскость, параллельная плоскости основания, площадь сечения равна 24,5 см^2. Найдите площади оснований, если известно, что их среднее арифметическое равно 25 см^2.

106. а) Докажите, что центр основания конуса равноудалён от всех прямых, содержащих образующие конуса.
б) Радиус основания конуса равен 3, образующая равна 5. Найдите площадь осевого сечения конуса.

в) Площадь сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси, в 9 раз меньше площади основания. В каком отношении эта плоскость делит высоту конуса?

г) Отношение площади основания конуса к площади его осевого сечения равно $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. Найдите углы осевого сечения конуса.

д) Площади оснований усечённого конуса равны 169π см^2 и π см^2, а его образующая равна 13 см. Найдите объём цилиндра, одним основанием которого является основание усечённого конуса, а другое основание содержит другое основание усечённого конуса.

е) Высота конуса равна h, а радиус его основания равен R. Какое наибольшее значение может принимать площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?

ж)* Из всех сечений конуса плоскостями, проходящими через его вершину, выбрано то, площадь которого наибольшая. Эта площадь в 2 раза больше площади осевого сечения. Найдите угол между высотой и образующей конуса.

з)* Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник, сторона которого равна 12 см. Через точку окружности основания конуса проведена плоскость так, что расстояние от центра основания конуса до этой плоскости равно 3 см. Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания конуса.

6

и)* Через середину образующей усечённого конуса проведена секущая плоскость, параллельная плоскости основания, площадь сечения равна 32 см^2. Найдите площади оснований, если известно, что их среднее геометрическое равно 30 см^2.

107. а) Высота конуса равна h, а радиус основания равен r. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

б) Конус вписан в правильную четырёхугольную пирамиду (т. е. основание конуса вписано в основание пирамиды, а вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды). Найдите отношение объёмов конуса и пирамиды.

в) В основание конуса с вершиной P вписан квадрат $ABCD$. Найдите отношение объёма конуса к объёму пирамиды $PABCD$.

г) Площадь основания конуса в 2 раза меньше площади его боковой поверхности. Какой треугольник является осевым сечением конуса?

д) Образующая конуса равна l и составляет угол в 45° с плоскостью основания конуса. Найдите объём конуса.

е) Докажите, что объём конуса равен одной шестой произведения длины окружности основания на площадь осевого сечения.

ж) Радиус сечения конуса с высотой h и радиусом основания R плоскостью, параллельной плоскости основания, равен r. Докажите, что высота образовавшегося усечённого конуса равна $\frac{R-r}{R}h$.

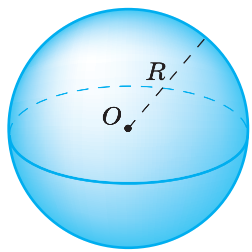
з)* Докажите, что при $n \to \infty$ площадь поверхности правильной 2^n-угольной пирамиды, вписанной в данный конус (т. е. все боковые рёбра пирамиды являются образующими конуса), стремится к площади боковой поверхности этого конуса.

108. а) Радиус основания конуса равен 1 см, образующая конуса равна 6 см. Найдите угол при вершине развёртки боковой поверхности этого конуса.
б) Конус вписан в правильную треугольную пирамиду. Найдите отношение объёмов конуса и пирамиды.
в) В основание конуса с вершиной P вписан равносторонний треугольник ABC. Найдите отношение объёма конуса к объёму пирамиды $PABC$.
г) Площадь боковой поверхности конуса в $\sqrt{2}$ раза больше площади его основания. Какой треугольник является его осевым сечением?
д) Образующая конуса равна l и составляет угол в 60° с плоскостью основания конуса. Найдите объём конуса.
е) Докажите, что разность квадратов площадей боковой поверхности конуса и его основания в 9 раз больше квадрата отношения объёма конуса к радиусу его основания.
ж) Высота усечённого конуса равна h, а радиусы его оснований равны r и r_1. Докажите, что его объём равен $\frac{\pi}{3}h(r^2 + rr_1 + r_1^2)$.
з)* Докажите, что при $n \to \infty$ объём правильной 2^n-угольной пирамиды, вписанной в данный конус, стремится к объёму этого конуса.

7

§7 Сфера и шар

33 Сфера



Сфера радиуса R с центром O

Рис. 151

Определение

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 151).

Данная точка называется центром сферы (точка O на рисунке 151), а данное расстояние — радиусом сферы (на рисунке 151 радиус сферы обозначен буквой R). Отрезок, соединяющий центр сферы с произвольной её точкой, также называется радиусом сферы; отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется

диаметром сферы. Ясно, что диаметр сферы радиуса R равен $2R$. Отметим, что сфера является поверхностью вращения — она может быть получена вращением окружности вокруг прямой, содержащей диаметр этой окружности.

Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом R сферы и расстоянием d от её центра O до плоскости.

Если плоскость α проходит через центр сферы (случай $d = 0$), то сечение сферы состоит из всех точек плоскости α, расположенных на расстоянии R от точки O (рис. 152), т. е. представляет собой окружность радиуса R с центром O. Эта окружность называется большой окружностью сферы.

Допустим теперь, что плоскость α не проходит через центр сферы. Проведём из точки O перпендикуляр OH к этой плоскости. Ясно, что $OH = d$. Возможны три случая.

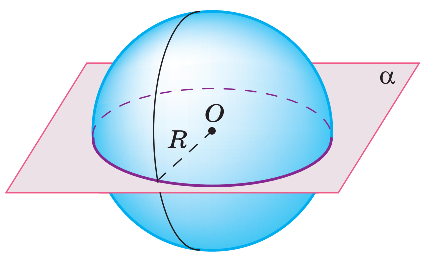
1 $d < R$. Проведём в плоскости α окружность с центром H радиуса

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

и рассмотрим произвольную точку M этой окружности (рис. 153, *а*). По теореме Пифагора

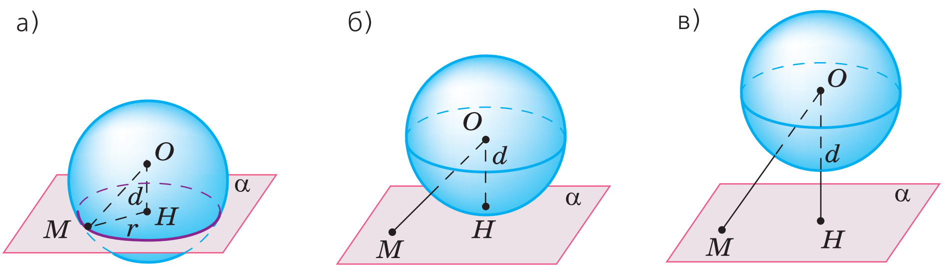
$$OM = \sqrt{OH^2 + HM^2} = \sqrt{d^2 + r^2} = R,$$

поэтому точка M принадлежит как плоскости α, так и данной сфере. С дру-



Плоскость α, проходящая через центр O сферы, пересекается со сферой по большой окружности

Рис. 152



а) $OH \perp \alpha$, $OH = d < R$,
$r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
Плоскость α пересекается со сферой по окружности радиуса r

б) $OH = d = R$,
$OM > OH$.
Плоскость α и сфера имеют только одну общую точку

в) $OH = d > R$,
$OM > OH$.
Плоскость α и сфера не имеют общих точек

Рис. 153

гой стороны, если M — общая точка сферы и плоскости α, то по теореме Пифагора

$$HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - d^2} = r,$$

т. е. точка M лежит на окружности с центром H радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Таким образом,

- **если расстояние d от центра сферы до плоскости меньше радиуса R сферы, то сфера и плоскость пересекаются по окружности, радиус которой равен $\sqrt{R^2 - d^2}$.**

Отметим, что в случае $d < R$ радиус r сечения меньше радиуса R сферы. Этим и объясняется название «большая окружность» для случая $d = 0$ — её радиус равен R.

2 $d = R$. В этом случае $OH = R$, т. е. точка H является общей точкой сферы и плоскости α (рис. 153, *б*). Любая другая точка M плоскости α не принадлежит сфере, поскольку $OM > OH = R$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH). Таким образом,

- **если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.**

3 $d > R$. В этом случае $OH > R$, поэтому для любой точки M плоскости α имеем $OM \geqslant OH > R$ (рис. 153, *в*). Следовательно, точка M не принадлежит сфере. Таким образом,

- **если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.**

34 Касательная плоскость к сфере

Обсудим случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. В этом случае указанная плоскость называется касательной плоскостью к сфере, а общая точка сферы и плоскости называется их точкой касания. На рисунке 154 изображена касательная плоскость α к сфере с центром O (A — точка касания).

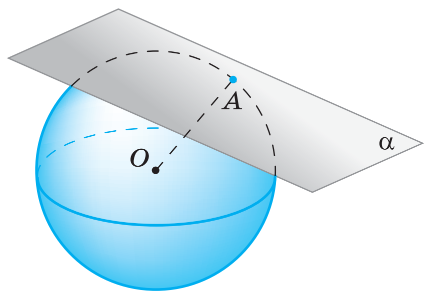
Докажем теорему о касательной плоскости к сфере, аналогичную теореме о касательной к окружности.

ТЕОРЕМА 1

Касательная плоскость к сфере перпендикулярна к радиусу сферы, проведённому в точку касания.

Доказательство. Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A (см. рис. 154), и докажем, что $OA \perp \alpha$.

Допустим, что это не так. Тогда радиус OA — наклонная к плоскости α, поэтому расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Следовательно, сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит условию: плоскость α — касательная, т. е. имеет со сферой только одну общую точку. Полученное противоречие означает, что $OA \perp \alpha$.



Плоскость α — касательная к сфере, A — точка касания

Рис. 154

Докажем теперь обратную теорему.

ТЕОРЕМА 2

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через конец радиуса, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство. По условию данный радиус — перпендикуляр, проведённый из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, значит, сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Иными словами, данная плоскость является касательной к сфере.

Если все грани многогранника касаются сферы (т. е. плоскости граней касаются сферы, причём точки касания принадлежат граням), то многогранник называется <u>описанным</u> около сферы, а сфера — <u>вписанной</u> в многогранник. Если все вершины многогранника лежат на сфере, то многогранник называется <u>вписанным</u> в сферу, а сфера — <u>описанной</u> около многогранника. Можно доказать, что описанный около сферы и вписанный в неё многогранники являются выпуклыми.

35 Взаимное расположение сферы и прямой

Исследуем теперь взаимное расположение сферы и прямой в зависимости от соотношения между радиусом R сферы и расстоянием d от её центра до прямой.

Проведём через данную прямую a и центр O сферы плоскость α (если $O \in a$, то проведём произвольную плоскость α через прямую a). Плоскость α пересекается со сферой по окружности радиуса R с центром O. Обозначим эту окружность буквой ω (рис. 155), а сферу буквой S. Возможны три случая.

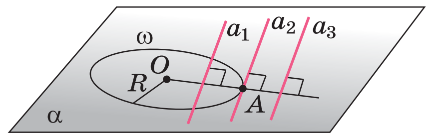


Рис. 155

1 $d < R$. В этом случае прямая a пересекает окружность ω в двух точках (это известно из курса планиметрии), и, следовательно, прямая a пересекает сферу S в двух точках (прямая a_1 на рисунке 155).

2 $d = R$. В этом случае прямая a и окружность ω имеют ровно одну общую точку (прямая a_2 на рисунке 155, она касается окружности ω в точке A). Поэтому прямая a и сфера S также имеют ровно одну общую точку (точку A). Прямая a называется <u>касательной прямой к сфере</u> S, а общая точка сферы S и прямой a называется их <u>точкой касания</u>.

3 $d > R$. В этом случае прямая a и окружность ω не имеют общих точек (прямая a_3 на рисунке 155). Поэтому прямая a и сфера S также не имеют общих точек.

В отношении касательной прямой к сфере имеют место две теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 п. 34. Докажите эти теоремы самостоятельно.

ТЕОРЕМА 1

Касательная прямая к сфере перпендикулярна к радиусу сферы, проведённому в точку касания.

ТЕОРЕМА 2

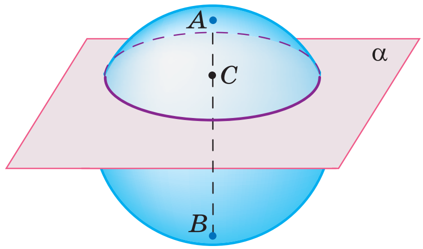
Если радиус сферы перпендикулярен к прямой, проходящей через конец радиуса, лежащий на сфере, то эта прямая является касательной к сфере.

36 Объём шара

Тело, ограниченное сферой, называется шаром; центр, радиус и диаметр сферы называются центром, радиусом и диаметром шара.

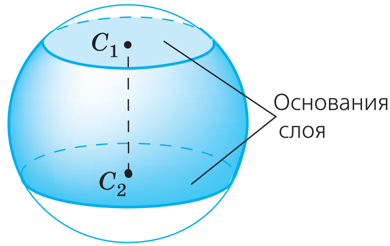
Можно сказать, что шар радиуса R с центром O — это фигура, которая содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и саму точку O), и не содержит других точек. Отметим также, что шар является телом вращения — он может быть получен вращением круга вокруг прямой, содержащей диаметр круга.

Часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, называется шаровым сегментом. На рисунке 156 секущая плоскость α проходит через точку C, лежащую на диаметре AB шара, и перпендикулярна к прямой AB. Плоскость α разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг с центром C, получившийся в сечении, называется основанием каждого из этих сегментов, а отрезки AC и BC — высотами сегментов.



Плоскость α разделяет шар на два шаровых сегмента

Рис. 156

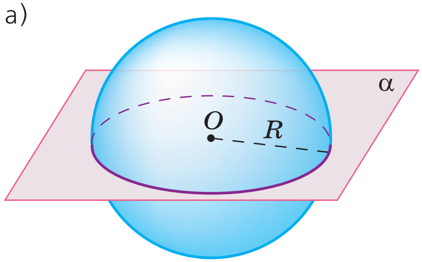


Шаровой слой

Рис. 157

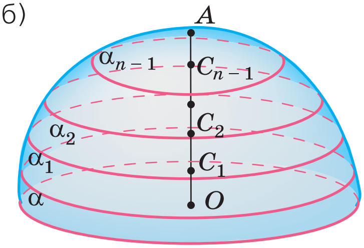
Часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями, называется шаровым слоем (рис. 157). Круги, получившиеся в сечениях шара этими плоскостями, называются основаниями шарового слоя, а расстояние между плоскостями — высотой шарового слоя. На

а)



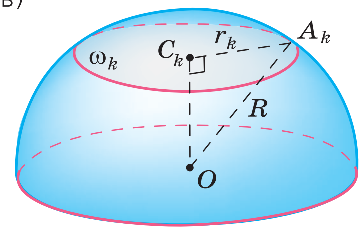
Плоскость α проходит через центр O шара и разделяет шар на два равных полушара

б)



Плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, перпендикулярные к прямой OA, разделяют полушар на n тел

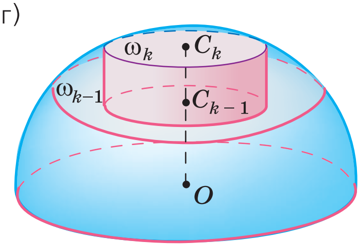
в)



$$OC_k = \frac{k}{n}R,$$

$$r_k = \sqrt{R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2}$$

г)



Цилиндр с основанием ω_k содержится в k-м шаровом слое с основаниями ω_{k-1} и ω_k

Рис. 158

рисунке 157 круги с центрами C_1 и C_2 — основания шарового слоя, а высота слоя равна длине отрезка C_1C_2.

Выведем формулу объёма шара.

ТЕОРЕМА

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

∗ Доказательство. Рассмотрим шар радиуса R с центром O и проведём через точку O плоскость α (рис. 158, *а*). Она разделяет шар на два равных сегмента (на два полушара). Найдём сначала объём одного из них.

Проведём радиус OA, перпендикулярный к плоскости α, разобьём его на n равных отрезков точками $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и проведём через эти точки плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, перпендикулярные к прямой OA и, следовательно, параллельные плоскости α (рис. 158, *б*).

7

Эти плоскости разделяют половину шара на n тел, из которых $(n-1)$ тел являются шаровыми слоями, а последнее тело (верхнее на рисунке 158, *б*) — шаровым сегментом. Высота каждого шарового слоя (и также высота шарового сегмента) равна $\frac{R}{n}$, поэтому $OC_k = \frac{k}{n}R$, а радиус r_k круга с центром C_k, получившегося в сечении полушара плоскостью α_k (обозначим этот круг ω_k), находим из прямоугольного треугольника OC_kA_k (рис. 158, *в*):

$$r_k = \sqrt{OA_k^2 - OC_k^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2}.$$

Заметим теперь, что k-й шаровой слой, основаниями которого являются круги ω_{k-1} и ω_k, содержит цилиндр с высотой $\frac{R}{n}$ и основанием ω_k (рис. 158, *г*; при $k=1$ нижним основанием шарового слоя будет круг с центром O радиуса R). Поэтому для объёма V_k шарового слоя с номером k справедливо неравенство

$$V_k > \pi r_k^2 \frac{R}{n} = \pi\frac{R^3}{n} - \pi\frac{k^2}{n^3}R^3, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \qquad (1)$$

Это же неравенство выполняется и для объёма V_n шарового сегмента, поскольку при $k=n$ правая часть в неравенстве (1) равна нулю. Складывая неравенства (1) для $k = 1, 2, \ldots, n$, учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} V_k = V$, где V — объём полушара, и используя неравенство Архимеда, получаем

$$V > \pi R^3 - \pi R^3\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) > \pi R^3 - \pi R^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) = \pi R^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n}\right).$$

Так как $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то правая часть полученного неравенства при $n \to \infty$ стремится к $\frac{2}{3}\pi R^3$. Следовательно, $V \geqslant \frac{2}{3}\pi R^3$.

С другой стороны, k-й шаровой слой содержится в цилиндре с высотой $\frac{R}{n}$ и основанием ω_{k-1}, а шаровой сегмент содержится в цилиндре с высотой $\frac{R}{n}$ и основанием ω_{n-1}. Поэтому

$$V_k < \pi r_{k-1}^2 \frac{R}{n} = \pi\frac{R^3}{n} - \pi\frac{(k-1)^2}{n^3}R^3, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$V < \pi R^3 - \pi R^3\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) < \pi R^3 - \pi R^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right) = \pi R^3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}\right).$$

При $n \to \infty$ правая часть этого неравенства стремится к $\frac{2}{3}\pi R^3$. Следовательно, $V \leqslant \frac{2}{3}\pi R^3$.

Таким образом, для объёма V полушара мы получили два неравенства:

$$V \geqslant \frac{2}{3}\pi R^3 \text{ и } V \leqslant \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Отсюда следует, что $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, и, значит, объём шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. *

37** Объёмы шарового сегмента и шарового сектора

Выведем формулу объёма шарового сегмента.

Обратимся к рисунку 159, *а*, на котором плоскость α проходит через точку C диаметра AB перпендикулярно к прямой AB и разделяет шар с центром O на два шаровых сегмента. Рассмотрим сначала сегмент с высотой AC, меньшей или равной радиусу R шара, и докажем, что объём V этого сегмента выражается формулой

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right), \qquad (2)$$

где $h = AC$ — высота сегмента.

Разобьём отрезок AC на n равных частей точками $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и проведём через эти точки плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, перпендикулярные к прямой AO (рис. 159, *б*). Они разбивают шаровой сегмент на n тел, первое из которых — шаровой сегмент с высотой $\frac{h}{n}$, а последующие — шаровые слои с такой же высотой. Поэтому $AC_k = \frac{k}{n}h$, а радиус r_k

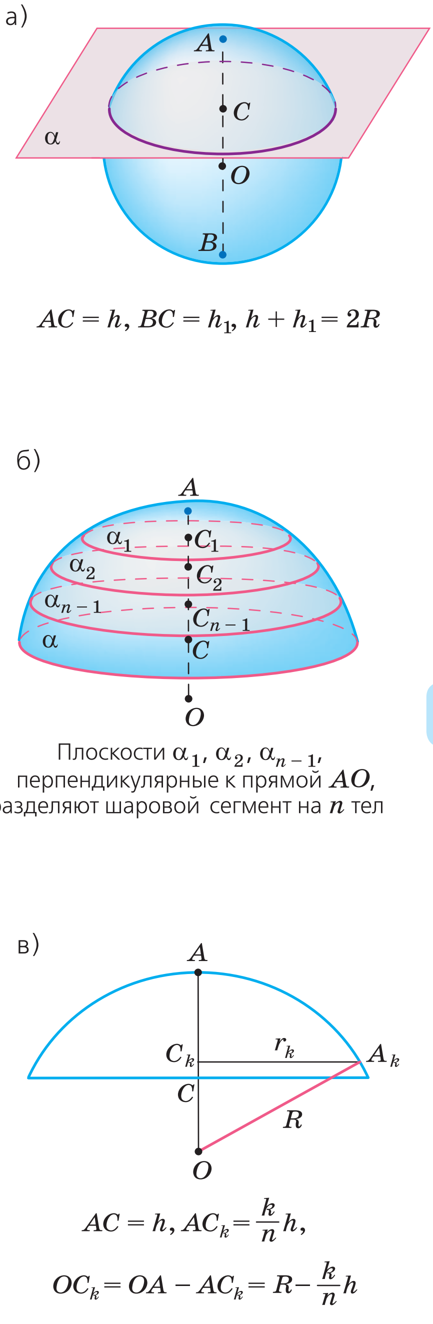


Рис. 159

круга, получившегося в сечении плоскостью α_k, находим из прямоугольного треугольника OC_kA_k (рис. 159, *в*):

$$r_k = \sqrt{OA_k^2 - OC_k^2} = \sqrt{R^2 - \left(R - \frac{k}{n}h\right)^2} = \sqrt{2\frac{k}{n}Rh - \frac{k^2}{n^2}h^2}.$$

В точности так же, как в доказательстве теоремы об объёме шара, для объёма V_k тела с номером k получаются неравенства

$$\pi r_{k-1}^2 \frac{h}{n} < V_k < \pi r_k^2 \frac{h}{n},$$

т. е. (подставляем выражения для r_{k-1} и r_k)

$$\pi\frac{h}{n}\left(2\frac{k-1}{n}Rh - \frac{(k-1)^2}{n^2}h^2\right) < V_k < \pi\frac{h}{n}\left(2\frac{k}{n}Rh - \frac{k^2}{n^2}h^2\right), \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Складывая эти неравенства для $k = 1,\ 2,\ \ldots\ n$, получаем двойное неравенство для объёма V исходного шарового сегмента

$$2\pi Rh^2\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2} - \pi h^3\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} < V <$$
$$< 2\pi Rh^2\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} - \pi h^3\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}.$$

Используя равенство $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и формулу Архимеда, приведём эти неравенства к виду (выполните вычисления самостоятельно)

$$\pi Rh^2\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi h^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < V < \pi Rh^2\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi h^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

При $n \to \infty$ левая и правая части этих неравенств стремятся к $\pi Rh^2 - \dfrac{\pi h^3}{3} = \pi h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)$. Следовательно, $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)$. Итак, объём шарового сегмента выражается формулой (2), где R — радиус шара, h — высота сегмента, причём $h \leqslant R$.

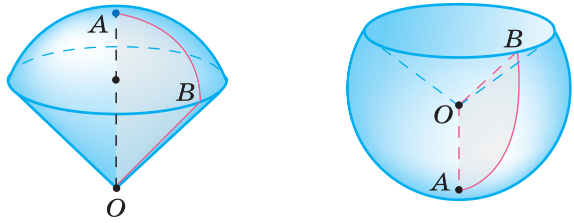
Докажем, что эта формула верна и в том случае, когда высота шарового сегмента больше радиуса R шара. Рассмотрим сегмент с высотой $h_1 = BC > R$, изображённый на рисунке 159, *а*. Его объём V_1 равен разности объёма шара и объёма V сегмента с высотой $h = AC < R$, т. е.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

Так как $h + h_1 = 2R$ (см. рис. 159, *а*), то $h = 2R - h_1$. Подставляя это выражение для h в формулу для V_1, после несложных алгебраических преобразований (выполните их самостоятельно) приходим к равенству

$$V_1 = \pi h_1^2\left(R - \frac{1}{3}h_1\right),$$

7



Шаровой сектор

Рис. 160

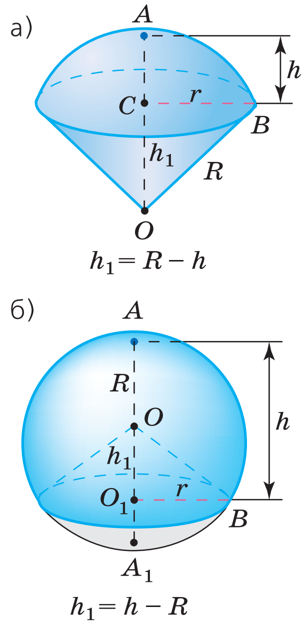


Рис. 161

т. е. формула (2) верна и в том случае, когда высота шарового сегмента больше радиуса шара.

Объём шарового слоя (см. рис. 157) можно вычислить как разность объёмов двух шаровых сегментов.

Рассмотрим, наконец, ещё одну часть шара, которая называется шаровым сектором. Это тело, которое получается вращением кругового сектора с дугой, меньшей 180°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих сектор радиусов. На рисунке 160 изображены шаровые секторы, полученные вращением кругового сектора, ограниченного радиусами OA и OB, вокруг прямой OA.

1 Если дуга кругового сектора меньше 90°, то шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса с общим основанием (рис. 161, *а*). Пусть высота шарового сегмента равна h. Тогда высота h_1 конуса равна $R - h$, где R — радиус кругового сектора и также R — радиус шара, частью которого является шаровой сектор.

Радиус r основания конуса выразим через R и h из прямоугольного треугольника OCB:

$$r = \sqrt{R^2 - h_1^2} = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Объём V шарового сектора равен сумме объёмов шарового сегмента и конуса:

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1.$$

Подставляя в правую часть равенства выражения для r и h_1, приходим к следующей формуле для объёма шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \qquad (3)$$

2 Если дуга кругового сектора больше 90° (рис. 161, *б*), то шаровой сектор можно представить как шаровой сегмент с высотой h, из которого

7

вырезан конус с вершиной O, высотой $h_1 = h - R$ и тем же основанием, что и у шарового сегмента (круг радиуса r с центром O_1). Этот же шаровой сектор можно представить как часть шара, которая остаётся, если вырезать из шара шаровой сектор, образованный вращением кругового сектора с дугой A_1B вокруг прямой AA_1, где A_1 — точка, диаметрально противоположная точке A.

Высота A_1O_1 шарового сегмента, содержащегося в вырезанном шаровом секторе, равна $2R - h$, поэтому объём вырезанного шарового сектора равен (применяем формулу (3)) $\frac{2}{3}\pi R^2(2R - h)$, а объём V оставшегося шарового сектора равен разности объёмов шара и вырезанного сектора, т. е.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^2(2R - h) = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Таким образом, формула (3) верна и в этом случае.

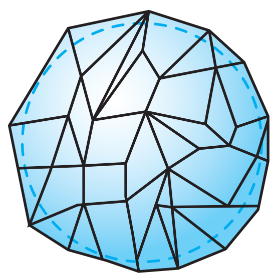
3 И наконец, если дуга кругового сектора равна 90°, то $h = R$, и шаровой сектор представляет собой полушар. Его объём равен $\frac{2}{3}\pi R^3$, что соответствует формуле (3).

38 Площади сферы и её частей

7

Площадями боковых поверхностей цилиндра и конуса мы назвали площади развёрток этих поверхностей. Но такой способ определения площади не пригоден для сферы, поскольку её нельзя развернуть на плоскость. Поэтому в случае сферы поступим иначе.

Будем рассматривать многогранники, описанные около данной сферы, и возьмём такую последовательность многогранников M_n ($n = 1, 2, \ldots$), у которой при $n \to \infty$ наибольший размер каждой грани стремится к нулю (под наибольшим размером грани будем понимать наибольшее расстояние между двумя точками этой грани; описанный около сферы многогранник с малыми гранями изображён на рисунке 162). Площадь поверхности многогранника M_n обозначим S_n.



Описанный около сферы многогранник с малыми гранями

Рис. 162

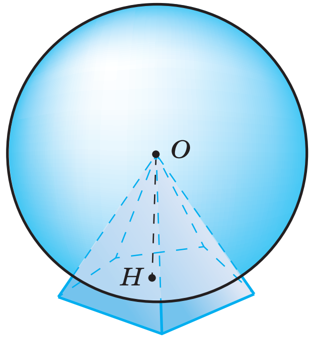
Площадью сферы назовём предел S_n при $n \to \infty$, т. е. предел площадей описанных многогранников при условии, что наибольший размер каждой грани стремится к нулю.

* Вычислим этот предел для сферы радиуса R. Соединим центр O сферы со всеми вершинами описанного многогранника M_n. Многогранник разобьётся на пирамиды с общей вершиной O,

основаниями которых служат грани многогранника. На рисунке 163 изображена одна из таких пирамид. Высота каждой пирамиды равна R (объясните почему), поэтому объём V_n многогранника M_n равен произведению $\frac{1}{3}R$ на сумму площадей граней, т. е. $V_n = \frac{1}{3}RS_n$, откуда следует равенство

$$S_n = \frac{3V_n}{R}. \qquad (4)$$

Так как при $n \to \infty$ наибольший размер каждой грани многогранника M_n стремится к нулю, то объём V_n многогранника стремится к объёму шара, т. е. к $\frac{4}{3}\pi R^3$. В самом деле, если наибольший размер каждой грани не превосходит δ, то многогранник M_n содержится в шаре радиуса $R+\delta$ с центром O, а с другой стороны, он содержит в себе исходный шар радиуса R. Поэтому



Отрезок $OH = R$ – перпендикуляр к плоскости грани

Рис. 163

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi (R+\delta)^3.$$

Правая часть этих неравенств при $\delta \to 0$ стремится к $\frac{4}{3}\pi R^3$, а значит, $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $n \to \infty$. Из равенства (4) теперь получаем

$$S_n \to \frac{3}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ при } n \to \infty,$$

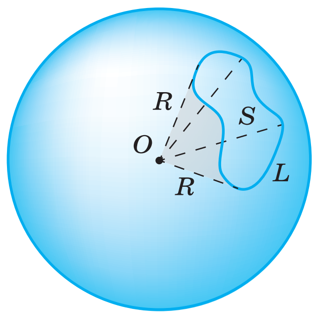
а так как $\frac{3}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$, то

$$S_n \to 4\pi R^2 \text{ при } n \to \infty. \ *$$

Следовательно,

■ **площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.**

**Выделим теперь на сфере какую-то её часть, ограниченную замкнутой линией L, лежащей на сфере (рис. 164). Пусть площадь этой части сферы равна S. Соединив каждую точку линии L с центром O сферы отрезком (радиусом сферы), получим тело, ограниченное выделенной частью сферы и поверхностью, состоящей из проведённых радиусов. Пусть объём этого тела равен V. Проведя такие же рассуж-



Часть сферы, ограниченная кривой L

Рис. 164

дения, как и при выводе формулы площади сферы, придём к равенству типа (4)

$$S = \frac{3V}{R}. \qquad (5)$$

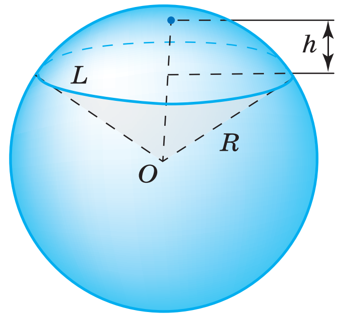
В частности, если кривая L — окружность, то ограниченная ею часть сферы является сферической частью поверхности шарового сектора и также сферической частью поверхности соответствующего шарового сегмента (рис. 165). Если высота сегмента равна h, то объём V шарового сектора равен $\frac{2}{3}\pi R^2 h$, поэтому, используя равенство (5), для площади S сферической части поверхности шарового сегмента получаем формулу

$$S = \frac{3}{R} \cdot \frac{2}{3}\pi R^2 h = 2\pi Rh. \qquad (6)$$

Часть сферы, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями, называется <u>шаровым поясом</u> (рис. 166). Можно сказать, что шаровой пояс является боковой поверхностью соответствующего шарового слоя.

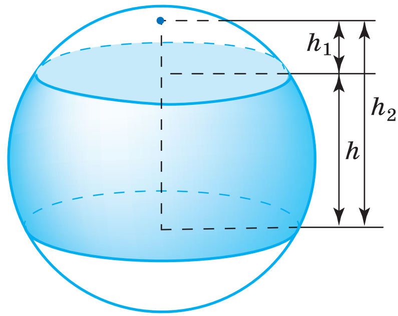
Площадь шарового пояса равна разности площадей сферических частей двух шаровых сегментов. Если высоты этих сегментов равны h_1 и h_2, то высота h шарового слоя равна $h_2 - h_1$, и, применяя формулу (6), для площади S шарового пояса получаем выражение

$S = 2\pi Rh_2 - 2\pi Rh_1 = 2\pi R(h_2 - h_1) = 2\pi Rh$.**



$S = 2\pi Rh$ – площадь сферической части поверхности шарового сегмента

Рис. 165



Шаровой пояс,
$h = h_2 - h_1$,
$S = 2\pi Rh$ – площадь шарового пояса

Рис. 166

? Вопросы и задачи

109. а) Площадь круга, ограниченного линией пересечения сферы и плоскости α, равна 5π см^2, а площадь круга, ограниченного большой окружностью, равна 9π см^2. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости α.

б) Найдите расстояние от ребра двугранного угла в 60°, грани которого касаются сферы радиуса 5 см, до центра этой сферы.

в) Докажите, что касательная прямая к сфере перпендикулярна к радиусу сферы, проведённому в точку касания.

г) Докажите, что любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии этой сферы.
д) Докажите, что в любой тетраэдр можно вписать сферу, и притом только одну.
е) Через точку A проведены прямые AB и AC, касающиеся сферы с центром O в точках B и C. Докажите, что $AB = AC$ и $\angle BAO = \angle CAO$. (Отрезки AB и AC называются отрезками касательных к сфере, проведёнными из одной точки.)
ж) Плоскость α касается сферы в точке A. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A и лежащая в плоскости α, является касательной прямой к этой сфере.
з)* Концы отрезков AB и CD, пересекающихся в точке M, лежат на сфере. Докажите, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.
и)* Стороны треугольника, равные 10, 10 и 12, касаются сферы радиуса 5. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

110. а) Длина окружности, по которой пересекаются сфера и плоскость α, равна 8π см, а длина большой окружности равна 10π см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости α.
б) Расстояние между точками касания сферы и граней двугранного угла в $30°$ равно 9 см. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.
в) Докажите, что если радиус сферы перпендикулярен к прямой, проходящей через конец радиуса, лежащий на сфере, то эта прямая является касательной к сфере.
г) Докажите, что любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии этой сферы.
д) Докажите, что около любого тетраэдра можно описать сферу, и притом только одну.
е) Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$.
ж) Плоскость α касается сферы в точке A. Докажите, что любая прямая, касающаяся этой сферы в точке A, лежит в плоскости α.
з)* Прямая MK касается сферы в точке K, а прямая MA пересекает эту сферу в точках A и B. Докажите, что $MK^2 = MA \cdot MB$.
и)* Стороны треугольника, равные 39, 39 и 30, касаются сферы, расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 24. Найдите радиус сферы.

111. а) Радиусы двух шаров относятся как 1 : 3. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего шара?
б) Прямая, содержащая диаметр шара радиуса R, является ребром прямого двугранного угла. Найдите объём части шара, находящейся внутри этого угла.
в) Найдите отношение объёма шара, вписанного в куб, к объёму этого куба.
г) В конус, осевое сечение которого является равносторонним треугольником, вписан шар (т. е. сфера, ограничивающая шар, касается основания и всех образующих конуса). Найдите отношение объёма конуса к объёму этого шара.

д) Из цилиндра, радиус и высота которого равны R, вырезан конус, основанием которого является основание цилиндра, а вершиной — центр другого основания цилиндра. Сравните объём оставшегося тела с объёмом половины шара радиуса R.
е)** Плоскость, проходящая на расстоянии d от центра шара радиуса R, делит шар на два шаровых сегмента. Найдите объём меньшего из этих сегментов.
ж)** Найдите объём шарового слоя, заключённого между двумя параллельными секущими плоскостями, находящимися на расстоянии 6 см друг от друга, если расстояние от центра шара до одной из них равно 2 см, а радиус шара равен 5 см.

112. а) Радиусы трёх шаров относятся как 1 : 2 : 3. Во сколько раз объём большего шара больше суммы объёмов меньших шаров?
б) Прямая, содержащая диаметр шара радиуса R, является ребром двугранного угла в 60°. Найдите объём части шара, находящейся внутри этого угла.
в) Найдите отношение объёма шара, описанного около куба, к объёму этого куба.
г) Около конуса, осевое сечение которого является равносторонним треугольником, описан шар (т. е. вершина конуса лежит на поверхности шара, а основание конуса является сечением шара). Найдите отношение объёма конуса к объёму этого шара.
д) Из цилиндра, радиус и высота которого равны R, вырезан конус, основанием которого является основание цилиндра, а вершиной — центр O другого основания цилиндра. Полученное тело и шар радиуса R с центром O пересечены секущей плоскостью, параллельной плоскости основания цилиндра. Сравните площади сечений этого тела и шара.
е)** Плоскость, проходящая на расстоянии d от центра шара радиуса R, делит шар на два шаровых сегмента. Найдите объём большего из этих сегментов.
ж)** Найдите объём шарового слоя, заключённого между двумя параллельными секущими плоскостями, находящимися на расстоянии 3 см друг от друга, если расстояние от центра шара до одной из них равно 4 см, а радиус шара равен 6 см.

113. а) Площадь сферы равна 16π см^2. Найдите её радиус.
б) Площадь сферы равна 4. Найдите площадь круга, ограниченного большой окружностью этой сферы.
в) В цилиндр вписан шар (т. е. сфера, ограничивающая шар, касается оснований и всех образующих цилиндра). Сравните отношение объёмов цилиндра и шара с отношением площади поверхности цилиндра к площади поверхности шара.
г)** Найдите объём шарового сектора (рис. 167), ограниченного частью сферы радиуса R и боковой поверхностью конуса с вершиной в центре сферы, если угол между образующей конуса и его осью равен φ.

7

д)** Боковая поверхность конуса с вершиной в центре сферы вырезает из неё поверхность площади S. Окружность, по которой пересекаются боковая поверхность конуса и сфера, ограничивает круг. Найдите его площадь, если угол между образующей конуса и его осью равен φ.

е)* Докажите, что отношение объёма многогранника, описанного около сферы, к площади его поверхности равно отношению объёма шара, ограниченного указанной сферой, к её площади.

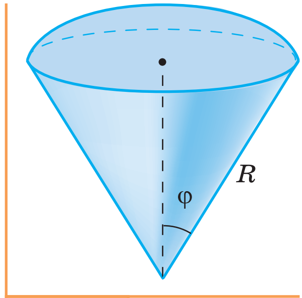


Рис. 167

114. а) Найдите отношение куба площади сферы, ограничивающей шар, к квадрату объёма этого шара.

б) Площадь сферы равна 4. Найдите площадь поверхности полушара, ограниченного этой сферой и плоскостью, проходящей через центр сферы.

в) В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар. Сравните отношение объёмов конуса и шара с отношением площади поверхности конуса к площади поверхности шара.

г)** Найдите площадь сферической части поверхности шарового сектора (см. рис. 167), ограниченного частью сферы радиуса R и боковой поверхностью конуса с вершиной в центре сферы, если угол между образующей конуса и его осью равен φ.

д)** Плоскость основания конуса с вершиной в центре сферы касается этой сферы. Площадь основания конуса равна S_1, а площадь круга, границей которого является линия пересечения сферы и конуса, равна S_2. Выразите площадь части сферы, лежащей внутри конуса, через S_1 и S_2.

е)* Докажите, что отношение объёма конуса, описанного около сферы, к площади его поверхности равно отношению объёма шара, ограниченного указанной сферой, к её площади.

7

Вопросы для повторения

1. Объясните, что такое цилиндрическая поверхность, её образующие и ось. По какой линии пересекаются цилиндрическая поверхность и плоскость, перпендикулярная к её оси?

2. Объясните, какое тело называется цилиндром. Что такое основания, боковая поверхность, образующие, радиус, высота и ось цилиндра? Докажите, что любая образующая цилиндра равна его высоте.

3. Какое сечение цилиндра называется осевым и что оно собой представляет?

4. Какое тело (поверхность) называется телом (поверхностью) вращения? Является ли цилиндр телом вращения?

5. Объясните, что такое развёртка боковой поверхности цилиндра и что она собой представляет. Что называется площадью боковой поверхности цилиндра и чему она равна?

6. Напишите формулу площади всей поверхности цилиндра.
7. Сформулируйте и докажите теорему об объёме цилиндра.
8. Объясните, что такое коническая поверхность, её образующие, вершина и ось.
9. Какое тело называется конусом? Что такое основание, вершина, боковая поверхность, образующие, высота и ось конуса? Докажите, что все образующие конуса равны друг другу.
10. Какое сечение конуса называется осевым и что оно собой представляет?
11. Является ли конус телом вращения?
12. Докажите, что сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси, является кругом, и выведите формулу радиуса этого круга.
13. Объясните, что такое усечённый конус, его основания, высота, боковая поверхность и образующие.
14. Объясните, что такое развёртка боковой поверхности конуса и что она собой представляет. Что называется площадью боковой поверхности конуса и чему она равна?
15. Напишите формулу площади всей поверхности конуса.
16. Напишите формулы площади боковой поверхности и площади всей поверхности усечённого конуса.
17. Сформулируйте и докажите* теорему об объёме конуса.

18. Напишите формулу объёма усечённого конуса.
19. Дайте определение сферы. Что такое центр, радиус и диаметр сферы? Является ли сфера поверхностью вращения?
20. Какая окружность называется большой окружностью сферы?
21. Докажите, что если расстояние d от центра сферы до плоскости меньше радиуса R сферы, то сфера и плоскость пересекаются по окружности, радиус которой равен $\sqrt{R^2 - d^2}$.
22. Докажите, что если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.
23. Докажите, что если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.
24. Объясните, какая плоскость называется касательной плоскостью к сфере и что такое точка касания сферы и плоскости.
25. Сформулируйте и докажите теорему о касательной плоскости к сфере, а также обратную теорему.
26. Дайте определение многогранника, описанного около сферы. Как называется сфера по отношению к описанному многограннику?
27. Дайте определение многогранника, вписанного в сферу. Как называется сфера по отношению к вписанному многограннику?

28. Проведите исследование взаимного расположения прямой и сферы в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центра до этой прямой.

29. Какая прямая называется касательной прямой к сфере и что такое точка касания сферы и прямой?

30. Сформулируйте и докажите теорему о касательной прямой к сфере, а также обратную теорему.

31. Какое тело называется шаром? Что такое центр, радиус и диаметр шара? Является ли шар телом вращения?

32. Дайте определение шарового сегмента. Объясните, что такое основание и высота шарового сегмента.

33. Дайте определение шарового слоя. Объясните, что такое основания и высота шарового слоя.

34. Сформулируйте и докажите* теорему об объёме шара.

35.** Выведите формулу объёма шарового сегмента.

36. Объясните, какое тело называется шаровым сектором. Выведите** формулу объёма шарового сектора.

37. Объясните, что называется площадью сферы. Выведите* формулу площади сферы.

38.** Выведите формулу площади сферической части поверхности шарового сегмента.

39.** Что называется шаровым поясом? Выведите формулу площади шарового пояса.

7

Дополнительные задачи

§ 6

115. Докажите, что если прямая имеет три общие точки с цилиндрической поверхностью, то эта прямая — образующая указанной поверхности.

116. Через точку, находящуюся на расстоянии d от оси цилиндрической поверхности, проведены всевозможные прямые, пересекающие эту поверхность. Найдите множество середин отрезков этих прямых с концами на цилиндрической поверхности.

117. Секущая плоскость, не пересекающая оснований цилиндра с центрами O_1 и O_2, разделяет цилиндр на две части. Докажите, что отношение объёмов этих частей равно отношению, в котором секущая плоскость делит отрезок O_1O_2.

118. Докажите, что произведение площадей поверхности, боковой поверхности и осевого сечения цилиндра более чем в 8 раз превосходит квадрат его объёма.

119. Докажите, что если прямая имеет три общие точки с конической поверхностью, то эта прямая — образующая указанной поверхности.

120. В данный конус вписан цилиндр (т. е. одно основание цилиндра принадлежит основанию конуса, а другое является сечением конуса) с наибольшей площадью боковой поверхности. Найдите отношение радиуса основания конуса к радиусу цилиндра.

121. В данный конус вписан цилиндр наибольшего объёма. Найдите отношение радиуса основания конуса к радиусу цилиндра.

122. Основанием конуса является основание цилиндра, а его вершиной — центр другого основания цилиндра. Докажите, что площадь боковой поверхности конуса больше половины площади боковой поверхности цилиндра.

123. Докажите, что произведение площадей поверхности, боковой поверхности и осевого сечения конуса более чем в 18 раз превосходит квадрат его объёма.

§ 7

124. Даны точки A и B. Найдите множество всех точек M пространства, для которых $\angle AMB = 90°$.

125. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, в который вписана сфера, если образующая усечённого конуса равна a.

126. Докажите, что площадь боковой поверхности конуса равна произведению его высоты на длину окружности, радиус которой равен радиусу сферы, касающейся образующих конуса в их серединах.

7

127. Докажите, что площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению его высоты на длину окружности, радиус которой равен радиусу сферы, касающейся образующих усечённого конуса в их серединах.

128. Докажите, что объём конуса составляет не более $\frac{8}{27}$ объёма описанного около него шара.

129. Докажите, что объём конуса не менее чем вдвое больше объёма вписанного в него шара.

130. Правильный $2n$-угольник вращается вокруг одной из своих наибольших диагоналей. Найдите отношение площади сферы, вписанной в образовавшуюся поверхность вращения, к площади этой поверхности, а также предел указанного отношения при $n \to \infty$.

131. Докажите, что отношение объёма усечённого конуса, описанного около сферы (т. е. сфера касается оснований и всех образующих усечённого конуса), к площади его поверхности равно отношению объёма шара, ограниченного указанной сферой, к её площади.

132. Площадь поверхности данного конуса в k раз больше площади вписанной в него сферы радиуса R. Существует ли конус, не равный данному и обладающий тем же свойством?

133.** Центры шаров с радиусами 8 см и 4 см находятся на расстоянии 6 см друг от друга. Найдите объём общей части этих шаров.

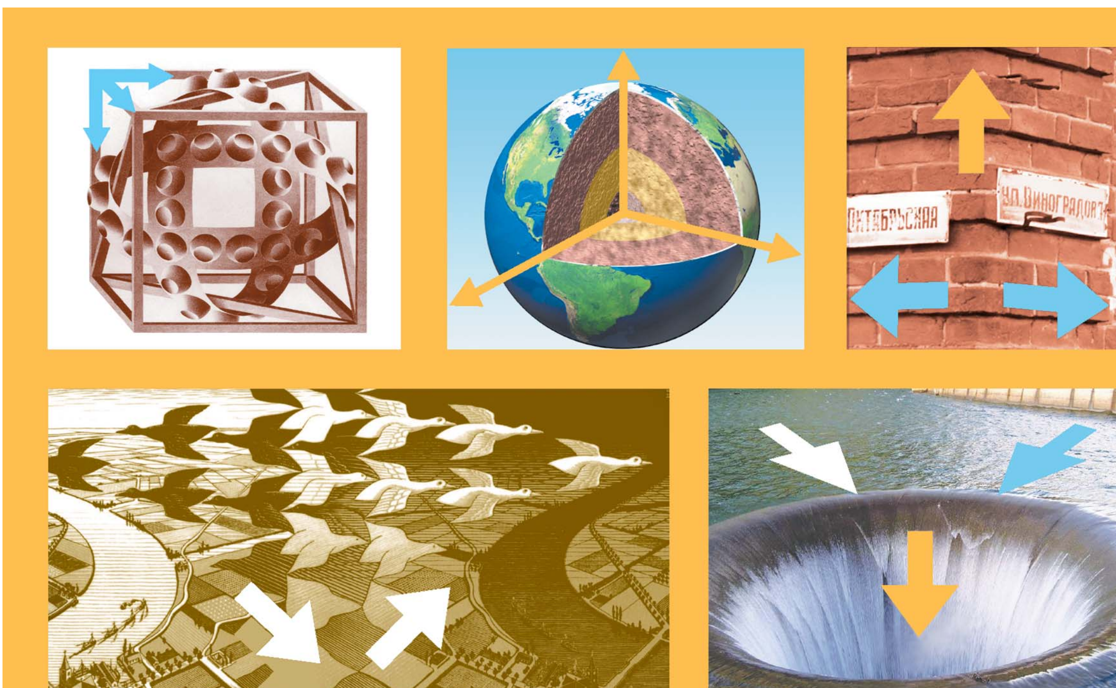
134.** Вне шара радиуса 3,9 см лежит часть шара радиуса 6 см. Найдите объём этой части, если центры шаров находятся друг от друга на расстоянии 6,3 см.

Глава 4

Координаты и векторы

В 9 классе вы познакомились с координатами и векторами на плоскости и их применением в задачах планиметрии. В пространстве координаты, векторы и действия с векторами вводятся так же, как и на плоскости, но с тем отличием, что прямоугольная система координат в пространстве содержит три, а не две, как на плоскости, оси координат, и потому каждая точка и каждый вектор в пространстве имеют три (а не две) координаты. Поэтому говорят, что пространство является трёхмерным (в отличие от двумерной плоскости).

Эта глава посвящена разработке векторно-координатного аппарата стереометрии. На ряде примеров мы покажем, что векторно-координатный метод позволяет эффективно решать многие задачи, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, с многогранниками и телами вращения.



§ 8

Координаты точки и координаты вектора

39 Прямоугольная система координат

В этой главе мы будем исходить из того, что в пространстве выбрана единица измерения отрезков, и, следовательно, длина каждого отрезка выражается определённым положительным числом; под длиной отрезка будем понимать это число. Кроме того, наряду с обычными отрезками будем рассматривать и такие «отрезки», концы которых совпадают, т. е. отрезок состоит из одной точки. Серединой такого отрезка считаем саму эту точку, а его длину полагаем равной нулю.

Напомним некоторые определения из курса планиметрии. Возьмём произвольную прямую l и отметим на ней какую-нибудь точку O (рис. 168, *а*). Точка O разделяет прямую l на два луча. Выберем один из них и назовём его положительной полуосью (на рисунке 168, *а* она отмечена стрелкой), а другой луч назовём отрицательной полуосью. Прямая l с выбранной положительной полуосью называется осью координат. Ось координат с началом O обычно обозначают так: Ox.

8

Координатой точки M, лежащей на оси координат Ox, называется длина отрезка OM, взятая со знаком «плюс», если точка M лежит на положительной полуоси (рис. 168, *б*), и со знаком «минус» в противном случае (рис. 168, *в*); в частности, координата точки O равна нулю.

Пусть теперь M — произвольная точка пространства. Проведём через точку M плоскость α, перпендикулярную к оси Ox. Эта плоскость пересекает ось Ox в точке M_1, координату которой на оси Ox обозначим x_0 (рис. 169). Координатой точки M по оси Ox назовём координату x_0 точки M_1. Отметим, что координата по оси Ox любой точки плоскости α также равна x_0.

Если в пространстве проведены три попарно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz с общим началом O, то говорят, что в пространстве задана прямоугольная система координат. Оси Ox, Oy и Oz называются со-

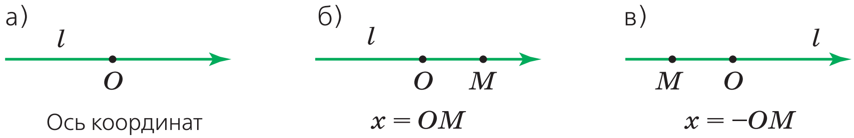
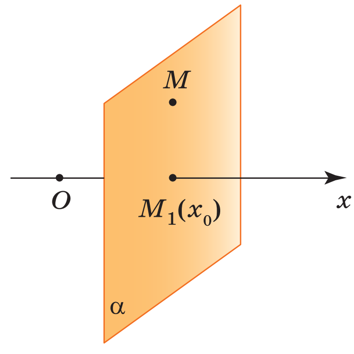


Рис. 168

ответственно осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат (рис. 170), а точка O называется началом координат. Вся система координат обозначается так: $Oxyz$.

Три плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются координатными плоскостями и обозначаются так: Oxy, Oyz и Ozx. Так как $Oz \perp Ox$ и $Oz \perp Oy$, то $Oz \perp Oxy$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), и также $Ox \perp Oyz$ и $Oy \perp Ozx$.

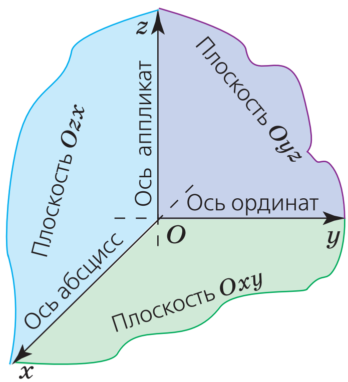


$M \in \alpha$, $\alpha \perp Ox$

Рис. 169

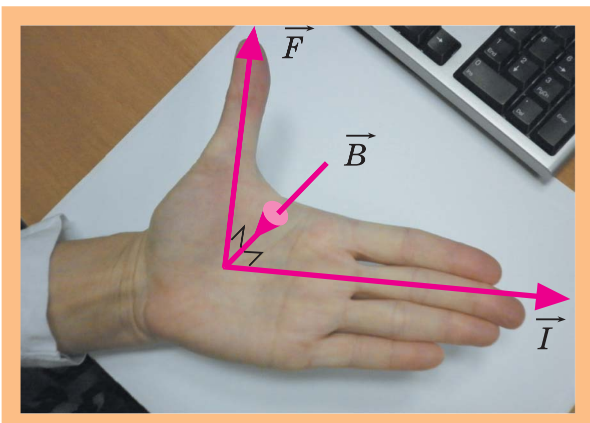
Пусть M — произвольная точка пространства. Абсциссой точки M называется её координата по оси Ox, ординатой — её координата по оси Oy, а аппликатой — её координата по оси Oz. Абсцисса, ордината и аппликата точки M называются координатами этой точки в системе координат $Oxyz$. Точку M с координатами x, y и z обозначают так: $M(x; y; z)$.

Ясно, что все три координаты начала координат равны нулю: $O(0; 0; 0)$. Если точка $M(x; y; z)$, отличная от точки O, лежит в какой-то координатной плоскости, то её координата по оси, перпендикулярной к этой плоскости, равна нулю. Например, если $M \in Oxy$, то аппликата z точки M равна нулю; при этом абсцисса x и ордината y являются координатами точки M в системе координат Oxy на координатной плоскости (обоснуйте это утверждение).



$Oz \perp Oxy$, $Ox \perp Oyz$,
$Oy \perp Ozx$

Рис. 170



8

Возьмём точку $M(x; y; z)$, не лежащую ни в одной из координатных плоскостей. Проведём через неё плоскости α, β и γ, перпендикулярные соответственно к осям Ox, Oy и Oz и пересекающие эти оси в точках M_1, M_2 и M_3 (рис. 171). Плоскости β и γ пересекаются по прямой MN_1, плоскости γ и α — по прямой MN_2, а плоскости α и β — по прямой MN_3 (на рисунке 171 точки N_1, N_2 и N_3 лежат в координатных плоскостях Oyz, Ozx и Oxy). В результате образуется прямоугольный параллелепипед $OM_1N_3M_2M_3N_2MN_1$ с измерениями

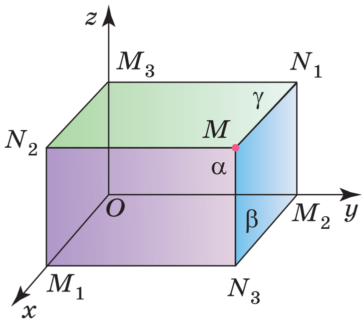


Рис. 171

$$OM_1 = |x|,\ OM_2 = |y| \text{ и } OM_3 = |z|,$$

а его вершины имеют координаты, указанные на рисунке 171 (обоснуйте это).

40 Координаты середины отрезка

Доказем, что

каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.

Пусть $M(x; y; z)$ — середина отрезка с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Проведём через точки A, B и M прямые, перпендикулярные к плоскости Oxy, и обозначим через $A_1(x_1; y_1; 0)$, $B_1(x_2; y_2; 0)$ и $M_1(x; y; 0)$ точки их пересечения с плоскостью Oxy (рис. 172). Если точки A_1, B_1 и M_1 не совпадают, то $A_1M_1 = M_1B_1$ (проекции равных отрезков AM и MB, лежащих на одной прямой, равны), т. е. точка M_1 — середина отрезка A_1B_1. Поэтому (согласно доказанному в курсе планиметрии)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Эти равенства верны и в том случае, когда точки A_1, B_1 и M_1 совпадают. Справедливость равенства

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

доказывается аналогично.

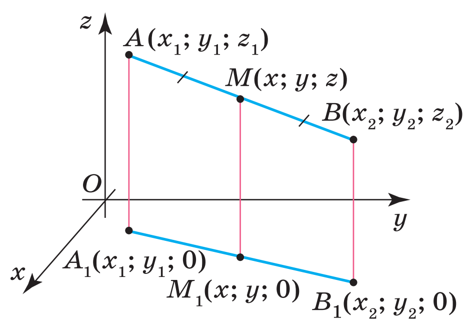


Рис. 172

41 Векторы

Все определения, относящиеся к векторам в пространстве, дословно повторяют соответствующие определения из курса планиметрии. Напомним некоторые из них.

Определение

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется вектором.

Каждый отрезок AB с несовпадающими концами определяет два вектора: $\overrightarrow{AB}$ (A — начало, B — конец, рис. 173) и $\overrightarrow{BA}$ (B — начало, A — конец). Говорят, что вектор $\overrightarrow{BA}$ является <u>противоположным</u> вектору $\overrightarrow{AB}$ и пишут:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

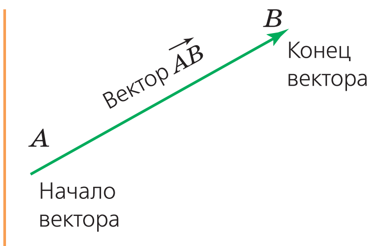


Рис. 173

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется <u>нулевым</u> и обозначается символом $\vec{0}$. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается сам этот вектор. <u>Длиной</u>, или <u>модулем</u>, вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$).

Ненулевые векторы называются <u>коллинеарными</u>, если они лежат либо на одной прямой (рис. 174, *а*), либо на параллельных прямых (рис. 174, *б*); нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Определение

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если середины отрезков AD и BC совпадают (рис. 175).

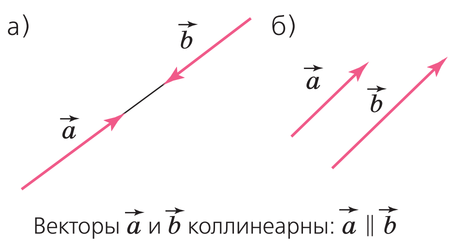


Рис. 174

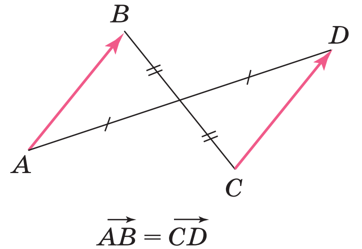


Рис. 175

Из этого определения следует, что

- **два равных вектора лежат в одной плоскости**

(обоснуйте это), поэтому равные векторы в пространстве обладают всеми свойствами равных векторов на плоскости. В частности,

- **все нулевые векторы равны друг другу;**
- **равные ненулевые векторы коллинеарны, их длины равны, и они одинаково направлены;**
- **от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.**

Докажите эти утверждения самостоятельно.

42 Координаты вектора

Координатами вектора в прямоугольной системе координат называются числа, равные разностям соответствующих координат его конца и начала. Координаты вектора записывают в фигурных скобках после обозначения вектора. Таким образом, если точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — начало и конец вектора, то $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$.

Докажем теорему о координатах равных векторов.

ТЕОРЕМА 1

Координаты равных векторов соответственно равны, и обратно: если координаты векторов соответственно равны, то эти векторы равны.

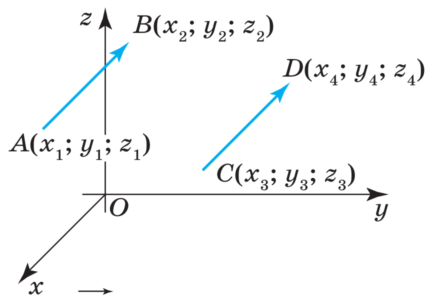
8

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — векторы, начала и концы которых имеют следующие координаты (рис. 176):

$$A(x_1; y_1; z_1),\ B(x_2; y_2; z_2),$$
$$C(x_3; y_3; z_3),\ D(x_4; y_4; z_4).$$

Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то середины отрезков AD и BC совпадают (по определению равных векторов), поэтому координаты этих середин соответственно равны, т. е.

$$\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2},\quad \frac{y_1 + y_4}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2},$$
$$\frac{z_1 + z_4}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2}. \qquad (1)$$



$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$

$\overrightarrow{CD}\ \{x_4 - x_3;\ y_4 - y_3;\ z_4 - z_3\}$

Рис. 176

Из равенств (1) получаем

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3, \quad y_2 - y_1 = y_4 - y_3, \\ z_2 - z_1 = z_4 - z_3, \qquad (2)$$

т. е. координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно равны.

Обратно: если координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно равны, т. е. выполнены равенства (2), то выполнены и равенства (1). Следовательно, середины отрезков AD и BC совпадают, поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

СЛЕДСТВИЕ

Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

В самом деле, из равенства $\vec{a} = \vec{b}$ следует, что координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны, а из равенства $\vec{b} = \vec{c}$ следует, что координаты векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соответственно равны. Следовательно, координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ соответственно равны, поэтому $\vec{a} = \vec{c}$.

ТЕОРЕМА 2

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\{x; y; z\}$ — данный вектор. Докажем, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA}$, равный $\vec{a}$ (рис. 177). Поскольку каждая координата точки O равна нулю, то точка A имеет координаты $(x; y; z)$.

Если точка A не лежит ни в одной из координатных плоскостей, то отрезок OA является диагональю прямоугольного параллелепипеда с измерениями $|x|$, $|y|$ и $|z|$ (см. с. 156), поэтому

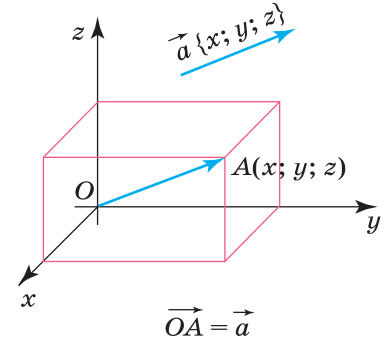


Рис. 177

$$OA = |\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Эта формула верна и в том случае, когда точка A лежит в координатной плоскости или на оси координат (обоснуйте это).

8

СЛЕДСТВИЕ

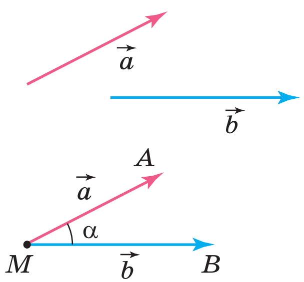
Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ выражается формулой

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (4)$$

В самом деле, расстояние AB равно длине вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Применяя к вектору $\overrightarrow{AB}$ формулу (3), получаем формулу (4).

43 Угол между векторами

Напомним, как определяется угол между векторами. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых вектора. Отложим от произвольной точки M векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$. Если лучи MA и MB не совпадают, то они образуют угол AMB. Градусную меру этого угла обозначим буквой α (рис. 178) и будем говорить, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α. Если же лучи MA и MB совпадают, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $0°$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.



Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α

Рис. 178

ТЕОРЕМА

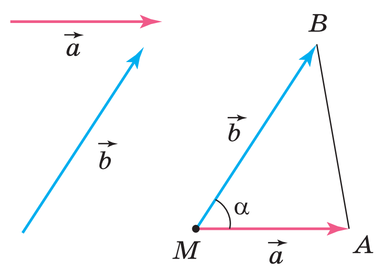
Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (5)$$

Доказательство. Отложим от произвольной точки $M(x_0; y_0; z_0)$ векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$. Концы этих векторов имеют следующие координаты: $A(x_0 + x_1; y_0 + y_1; z_0 + z_1)$ и $B(x_0 + x_2; y_0 + y_2; z_0 + z_2)$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 179), то по теореме косинусов

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos\alpha. \qquad (6)$$



$\overrightarrow{MA} = \vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{MB} = \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

Рис. 179

8

а)

$$\alpha = 0^\circ,\ \cos\alpha = 1$$
$$AB^2 = (MA - MB)^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB =$$
$$= MA^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos\alpha$$

б)

$$\alpha = 180^\circ,\ \cos\alpha = -1$$
$$AB^2 = (MA + MB)^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB =$$
$$= MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos\alpha$$

Рис. 180

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (рис. 180). Выражая длины отрезков AB, MA и MB по формуле (4) на с. 160 и подставляя эти выражения в равенство (6), после несложных преобразований (выполните их самостоятельно) приходим к формуле (5).

Из этой теоремы следует, что

величина угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от выбора точки M, от которой откладываются векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$.

Иными словами, если $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NK}$ и $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NL}$, то $\angle AMB = \angle KNL$. В самом деле, так как координаты равных векторов соответственно равны, то для косинусов углов AMB и KNL по формуле (5) получится одно и то же выражение, и, следовательно, эти углы равны.

Вопросы и задачи

135. а) Через точку $M(1; -2; 5)$ проведены три плоскости, перпендикулярные соответственно к оси Ox, к оси Oy и к оси Oz. Найдите координаты точек пересечения этих плоскостей с осями координат.

б) Найдите расстояния от точки $M(3; 4; -12)$ до плоскости Oxy; до оси Oz; до начала координат.

в) Найдите угол между прямой OA, где $A(1; 1; \sqrt{2})$, и осью Ox.

г) Точки $A(2; -2; 0)$ и $A_1(2; -2; 5)$ являются вершинами прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, диагонали грани $ABCD$ пересекаются в точке $O(0; 0; 0)$. Найдите координаты остальных вершин этого параллелепипеда, если $AB = BC$.

д) Докажите, что множеством всех точек $M(x; y; z)$, для которых $z = p$, где p — данное число, является плоскость, перпендикулярная к оси Oz.

е)* Точка $O(0; 0; 0)$ является серединой ребра BC тетраэдра $ABCD$, точка C лежит на оси Ox, $A(0; 20; 0)$ и $D(0; 0; 12)$, двугранный угол $BACD$ равен 45°. Найдите координаты вершин B и C.
ж)* На отрезке с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ отмечена точка $M(x; y; z)$, отличная от точек A и B. Докажите справедливость следующих равенств:

$$\frac{x-x_1}{AM}=\frac{x_2-x}{MB},\quad \frac{y-y_1}{AM}=\frac{y_2-y}{MB},\quad \frac{z-z_1}{AM}=\frac{z_2-z}{MB}.$$

136. а) Через точку M проведены три плоскости, перпендикулярные соответственно к оси Ox, к оси Oy и к оси Oz и пересекающие эти оси в точках $M_1(-2; 0; 0)$, $M_2(0; 3; 0)$, $M_3(0; 0; -7)$. Найдите координаты точки M.
б) Расстояние от точки до начала координат равно 12. Найдите расстояния от этой точки до плоскостей Oxy, Oyz и Oxz, если её ордината равна абсциссе, а аппликата вдвое меньше абсциссы.
в) Найдите угол между прямой OA, где $A(1; \sqrt{3}; 2)$, и плоскостью Oxy.
г) Точки $A(2; 0; 0)$ и $C(-2; 4; 0)$ являются вершинами прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка $O(0; 0; 0)$ лежит на прямой AB. Найдите координаты остальных вершин параллелепипеда, если $AA_1=2AB$.
д) Докажите, что множеством всех точек $M(x; y; z)$, для которых $x=p$ и $y=q$, где p и q — данные числа, является прямая, перпендикулярная к плоскости Oxy.
е)* Началом прямоугольной системы координат является точка O пересечения медиан треугольника ABC, точки A и B лежат в плоскости Oxy, точка D — на оси Oz, двугранный угол $BACD$ равен 60°. Найдите координаты точки D, если $AB=BC=CA=10$.
ж)* На отрезке с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ отмечена точка $M(x; y; z)$ так, что $AB=kAM$. Докажите, что $(x_2-x_1)=k(x-x_1)$, $(y_2-y_1)=k(y-y_1)$ и $(z_2-z_1)=k(z-z_1)$.

8

137. а) Точка M — середина отрезка AB. Найдите: координаты точки M, если $A(-2; 3; -5)$ и $B(4; -3; -1)$; координаты точки B, если $A(6; -7; 0)$ и $M(4; -2; 3)$.
б) Точки $A(7; -11; 8)$, $B(3; 4; -14)$ и $C(1; 5; -4)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.
в)* Отрезки AM и BN — медианы треугольника ABC. Найдите координаты точки M, если $A(-1; 2; 2)$, $B(3; -2; -6)$ и $N(1; 1; -1)$.
г)* Найдите медиану OM треугольника с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; -4; -7)$, $B(11; -14; -17)$.

138. а) Точка M — середина отрезка AB, точка B — середина отрезка AC. Найдите: координаты точки C, если $A(3; 4; 5)$ и $M(0; 5; 5{,}5)$; координаты точки M, если $A(-1; 2; 1)$ и $C(-7; 6; 3)$.
б) Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ имеют аппликаты 5 и 6, расстояние от точки B до плоскости Oxy равно 14. Найдите расстояние от точки D до плоскости Oxy.

в)* Отрезки AM и BN — медианы треугольника ABC. Найдите координаты точки B, если $A\,(1; -3; 2)$, $M\,(-3; 2; -1)$, $N\,(1; 2; -3)$.

г)* Точки $O\,(0; 0; 0)$, $A\,(-7; 6; 5)$ и $C\,(3; -2; -3)$ являются вершинами параллелограмма $OABC$. Найдите OB.

139. а) Точки M и N — середины рёбер AB и BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите все ненулевые векторы с началом и концом в вершинах этого параллелепипеда, коллинеарные вектору $\overrightarrow{MN}$.

б) Прямая AB лежит в плоскости α, плоскость α пересекается с плоскостью β по прямой CD, не совпадающей с прямой AB, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Докажите, что прямая AB параллельна плоскости β.

в) Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно точки M. Докажите, что $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB}$.

г)* Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно плоскости α, точки A и A_1 различны, векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны. Каково взаимное расположение прямой AB и плоскости α?

д)* Медианы грани ABD тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке M, а медианы грани BCD — в точке N, точки P и Q — середины рёбер AD и CD. Докажите, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ коллинеарны.

140. а) Точка M — середина ребра AB параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите все ненулевые векторы с началом и концом в вершинах этого параллелепипеда, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AM}$.

б) Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, вектор $\overrightarrow{AB}$ лежит в плоскости α, а вектор $\overrightarrow{CD}$ не лежит в ней. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости α.

в) Точки P и Q симметричны точкам A и B относительно точки M, точки C и D симметричны точкам P и Q относительно точки N. Докажите, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

г)* Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно прямой a, точки B и B_1 различны, векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны. Каково взаимное расположение прямых AB и a?

д)* Точки M и N являются точками пересечения диагоналей граней AA_1B_1B и AA_1D_1D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки P и Q — середины рёбер AB и AD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

141. а) Как связаны между собой соответственные ненулевые координаты векторов $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

б) Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{AC}$, если $A\,(2; -5; 3)$, $B\,(-6; 5; 2)$ и $M\,(-3; 1; 2)$.

в) Вершина C равнобедренного треугольника ABC лежит на оси абсцисс, $A(-3; -9; -15)$, $B\,(15; -3; 9)$, $AC = BC$. Найдите расстояние от вершины C до точки пересечения медиан треугольника ABC.

г)* Докажите, что точки $A\,(2; -1; 4)$, $B\,(5; 5; 10)$ и $C\,(-6; -5; 12)$ являются вершинами прямоугольного треугольника.
д)* Ребро DA тетраэдра $DABC$ перпендикулярно к плоскости ABC, угол ACB — прямой. Точка M равноудалена от всех вершин этого тетраэдра. Найдите MA, если $AC = BC = 4$, $AD = 2$.
е)* Точка M — середина ребра CD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка N — середина ребра CC_1. Прямая DN пересекает прямую CD_1 в точке L. Найдите расстояние от середины отрезка B_1M до точки L, если $AB = AA_1 = 12$, $AD = 4$.

142. а) Докажите, что если $\vec{a} = -\vec{b}$ и $\vec{b} = -\vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.
б) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{BC}$, если $A\,(3; 1; -2)$, $B\,(5; -3; 6)$, $M\,(2; 0; 4)$.
в) Точки $A\,(16; 16; 8)$, $B\,(6; -12; 12)$ и $C\,(0; 0; -a^2)$ являются вершинами треугольника ABC. Найдите сторону BC и медиану CM этого треугольника, если $BC = 0{,}75AC$.
г)* Докажите, что точки $A\,(1; -1; 2)$, $B\,(3; -2; 4)$ и $C\,(5; -3; 6)$ лежат на одной прямой.
д)* Ребро DB тетраэдра $DABC$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB = BC = 5$, $AC = 6$, $BD = 15$. Точка M равноудалена от всех вершин этого тетраэдра. Найдите MA.
е)* Через вершину A и середину M ребра BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная прямой A_1D_1 и пересекающая прямую CC_1 в точке N. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника AMN до точки пересечения диагоналей грани $ABCD$, если $AD = 12$, $AB = AA_1 = 18$.

8

143. а) Найдите длины векторов $\vec{a}\{2; 2; 1\}$, $\vec{b}\{-1; 2; -2\}$ и $\vec{c}\{-2; 1; 2\}$ и углы между ними.
б) Диагонали грани BCC_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке M. Определите вид угла (острый, тупой или прямой) между векторами $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{C_1D}$.
в) Вектор $\vec{a}$ образует с каждым из векторов $\vec{i}\{1; 0; 0\}$ и $\vec{j}\{0; 1; 0\}$ угол, равный 60°. Найдите угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{k}\{0; 0; 1\}$.
г)* Точки $A\,(1; 1; 5)$, $B\,(2; 4; 5)$ и $C\,(x; 2; 5)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Найдите x и косинус угла между прямыми AC и BD.

144. а) Найдите длины векторов $\vec{a}\{2; 10; 11\}$, $\vec{b}\{-5; -10; 10\}$ и $\vec{c}\{14; -5; 2\}$ и углы между ними.
б) Диагонали грани ABB_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке M. Определите вид угла между векторами $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{C_1D}$.
в) Вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}\{1; 0; 0\}$ и $\vec{j}\{0; 1; 0\}$ углы, равные 135° и 120°. Найдите угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{k}\{0; 0; 1\}$.
г)* Точки $A\,(14; -8; -1)$, $B\,(7; 3; -1)$ и $C\,(-6; 4; z)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите z и косинус острого угла этого ромба.

§9

Операции с векторами

44 Сумма и разность векторов

Напомним определения суммы и разности векторов. Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — данные векторы (рис. 181, *а*). Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BE}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$ (рис. 181, *б*). Вектор $\overrightarrow{AE}$, а также любой равный ему вектор называется <u>суммой векторов</u> $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

<u>Разностью векторов</u> $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$ (на рисунке 182 показано, как построить разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложив их от одной точки).

Докажем <u>теорему о координатах суммы двух векторов</u>.

ТЕОРЕМА

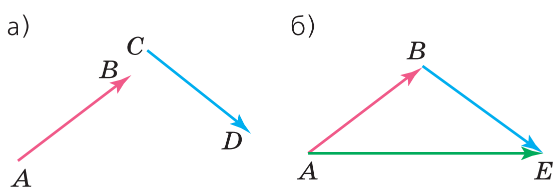
Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Доказательство. Рассмотрим произвольные векторы $\overrightarrow{AB}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{CD}\{x_2; y_2; z_2\}$ и докажем, что вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ имеет координаты

$$\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}.$$

Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки A. Так как координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $\{x_1; y_1; z_1\}$, то координаты точки B равны $(x_0+x_1; y_0+y_1; z_0+z_1)$. Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BE}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$ (рис. 183). Вектор $\overrightarrow{BE}$ имеет такие же координаты, как и вектор $\overrightarrow{CD}$, т. е. $\{x_2; y_2; z_2\}$. Поэтому координаты точки E равны:

$$((x_0+x_1)+x_2;\ (y_0+y_1)+y_2;\ (z_0+z_1)+z_2).$$



$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

Рис. 181

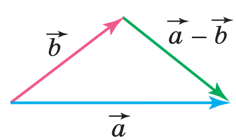


Рис. 182

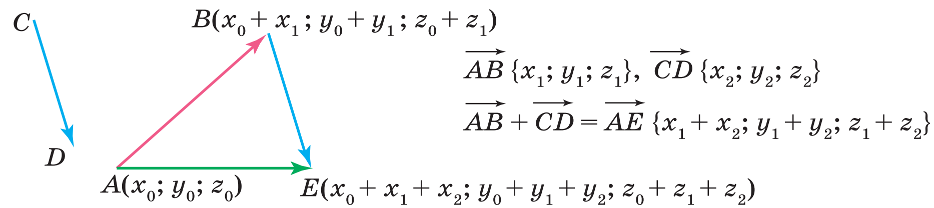


Рис. 183

По координатам точек A и E находим координаты вектора $\overrightarrow{AE}$:

$$\{(x_0+x_1+x_2)-x_0;\ (y_0+y_1+y_2)-y_0;\ (z_0+z_1+z_2)-z_0\}=$$
$$=\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}.$$

Поскольку $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (по определению суммы векторов) и координаты равных векторов соответственно равны, то вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ имеет координаты $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1

Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 184).

В самом деле, так как координаты равных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ (и также равных векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$) соответственно равны, то согласно доказанной теореме координаты векторов $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$ также соответственно равны, поэтому равны и сами векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$.

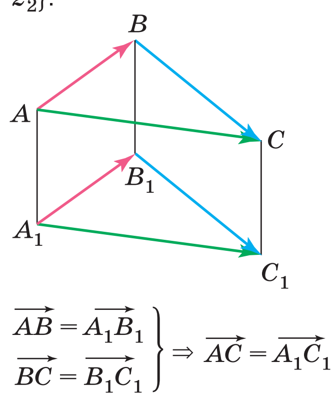


Рис. 184

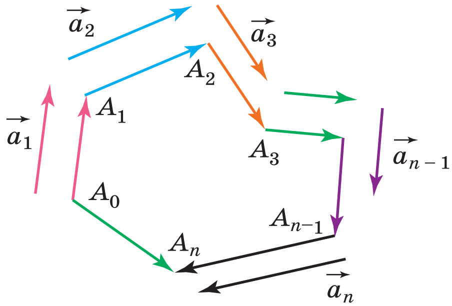
Ещё три следствия докажите самостоятельно.

СЛЕДСТВИЕ 2

Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

СЛЕДСТВИЕ 3

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:
1. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, где $(-\vec{a})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{a}$;
3. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
4. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.



$$\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{a}_1,\ \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2, \ldots,\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a}_n,$$
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n =$$
$$= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_0A_n}$$

Рис. 185

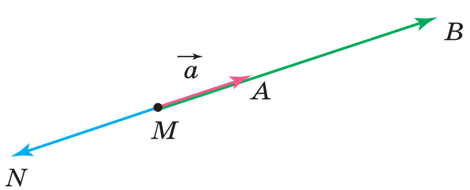
СЛЕДСТВИЕ 4

Для построения суммы нескольких векторов можно пользоваться правилом многоугольника, известным из курса планиметрии (рис. 185).

При этом, однако, следует иметь в виду, что «многоугольник», получаемый при построении этой суммы, может оказаться пространственным, т. е. таким, у которого не все вершины лежат в одной плоскости.

45 Произведение вектора на число

Напомним, как определялось произведение вектора на число. Пусть $\overrightarrow{MA}$ — ненулевой вектор и число $k \neq 0$. Построим такой вектор $\overrightarrow{MB}$, длина которого равна $|k| \cdot |\overrightarrow{MA}|$, а точка B лежит на луче MA, если $k > 0$, и на продолжении луча MA, если $k < 0$. Иначе говоря, векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MA}$ одинаково направлены, если $k > 0$, и противоположно направлены, если $k < 0$. Вектор $\overrightarrow{MB}$, и также любой равный ему вектор, называется произведением вектора $\overrightarrow{MA}$ на число k. Произведением нулевого вектора на любое число и также любого вектора на число 0 считается нулевой вектор. На рисунке 186 изображены векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = 3\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN} = -1{,}5\vec{a}$.



$$\overrightarrow{MA} = \vec{a},$$
$$\overrightarrow{MB} = 3\vec{a},$$
$$\overrightarrow{MN} = -1{,}5\vec{a}$$

Рис. 186

9

Из определения произведения вектора на число следует, что векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны. С другой стороны, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они лежат в одной плоскости. Поэтому согласно доказанному в курсе планиметрии

- **если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует, и притом только одно, такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.**

Как и в планиметрии, имеет место теорема о координатах произведения вектора на число.

ТЕОРЕМА

Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Доказательство. Способ 1. Эту теорему можно доказать таким же способом, как и в планиметрии. Изложим кратко это доказательство.

Рассмотрим векторы $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ и $\vec{b}\{kx;\ ky;\ kz\}$ и докажем, что $k\vec{a} = \vec{b}$. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то справедливость утверждения очевидна (убедитесь в этом).

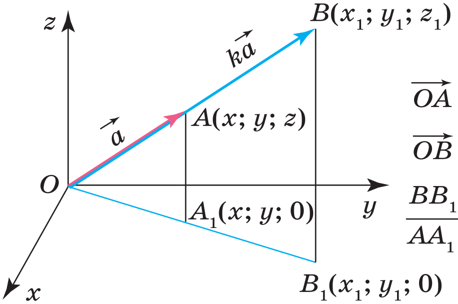
Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$, а для косинуса угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле (5) п. 43 получаем $\cos\alpha = 1$, если $k > 0$, и $\cos\alpha = -1$, если $k < 0$. Это означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $k > 0$, и противоположно, если $k < 0$.

Таким образом, согласно определению произведения вектора на число вектор $\vec{b}\{kx;\ ky;\ kz\}$ является произведением вектора $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ на число k, причём каждая координата вектора $\vec{b}$ равна произведению соответствующей координаты вектора $\vec{a}$ на число k.

Способ 2. Рассмотрим другой (более наглядный) способ доказательства теоремы для случая $\vec{a}\{x;\ y;\ z\} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Координаты вектора $k\vec{a}$ обозначим $\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$. Докажем, что $x_1 = kx$, $y_1 = ky$ и $z_1 = kz$.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = k\vec{a}$ (на рисунке 187 $k > 0$, случай $k < 0$ рассматривается аналогично). Так как каждая координата точки O равна нулю, то координаты точек A и B равны соответствующим координатам векторов $\vec{a}$ и $k\vec{a}$: $A(x;\ y;\ z)$ и $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

Пусть точки A и B не лежат ни в какой координатной плоскости (другие случаи рассмотрите самостоятельно) и пусть $A_1(x;\ y;\ 0)$ и $B_1(x_1;\ y_1;\ 0)$ — ортогональные проекции точек A и B на плоскость Oxy. Из подобия прямоугольных треугольников OBB_1 и OAA_1 (они подобны, поскольку имеют общий острый угол с вершиной O) следует пропорция



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\,\{x; y; z\},$

$\overrightarrow{OB} = k\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\},$

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{OB}{OA} = k \Rightarrow \frac{z_1}{z} = k \Rightarrow z_1 = kz$$

Рис. 187

$\dfrac{BB_1}{AA_1} = \dfrac{OB}{OA}$, а так как $\dfrac{BB_1}{AA_1} = \dfrac{z_1}{z}$ и $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{|k\vec{a}|}{|\vec{a}|} = k$, то $\dfrac{z_1}{z} = k$, откуда $z_1 = kz$. Аналогично доказывается справедливость равенств $x_1 = kx$ и $y_1 = ky$.

СЛЕДСТВИЕ

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:
1. $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$; 2. $(k + l)\,\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$; 3. $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Выведите это следствие самостоятельно, опираясь на доказанную теорему.

9

46 Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они оказываются лежащими в одной плоскости.

Ясно, что любые два вектора компланарны; три вектора, два из которых коллинеарны, также компланарны (объясните почему), а три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными. На рисунке 188 изображён параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ компланарны, так как если отложить от точки A вектор, равный вектору $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор $\overrightarrow{AA_1}$, а векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат в одной плоскости — плоскости ACC_1. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{AA_1}$ не лежит в плоскости ABD.

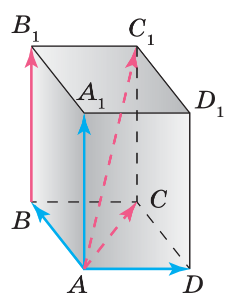


Рис. 188

Докажем теорему о разложении вектора по трём некомпланарным векторам.

ТЕОРЕМА

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е. представить в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \qquad (1)$$

причём коэффициенты разложения, т. е. числа x, y и z, определяются единственным образом.

Доказательство. От какой-нибудь точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ (рис. 189). Через точку P проведём прямую, параллельную прямой OC, и обозначим через P_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью AOB (если точка P лежит на прямой OC, то в качестве точки P_1 возьмём точку O). По определению суммы векторов

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}. \qquad (2)$$

Вектор $\overrightarrow{OP_1}$ лежит в плоскости AOB, поэтому его можно разложить по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (это было доказано в курсе планиметрии), т. е. представить в виде

$$\overrightarrow{OP_1} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

где x и y — некоторые числа. Векторы $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны и $\overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$, поэтому найдётся такое число z, что

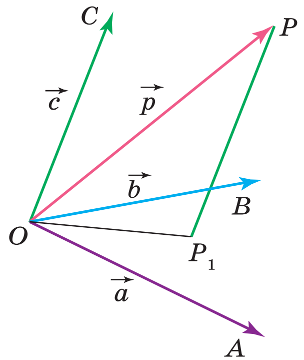
$$\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC} = z\vec{c}.$$

Подставляя полученные выражения для векторов $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{P_1P}$ в правую часть равенства (2) и учитывая, что $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, приходим к равенству (1):

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Докажем теперь, что коэффициенты разложения в равенстве (1) определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением (1) существует другое разложение вектора $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c},$$



$PP_1 \parallel OC$,

$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} =$
$= x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Рис. 189

где, например, коэффициент x_1 не равен x. Вычитая это равенство для вектора $\vec{p}$ из равенства (1), получаем

$$\vec{0} = (x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b} + (z - z_1)\,\vec{c}.$$

Разделив обе части этого равенства на $(x - x_1)$, приходим к равенству

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c}.$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (обоснуйте это), а это противоречит условию теоремы. Следовательно, коэффициенты разложения в формуле (1) определяются единственным образом.

47 Скалярное произведение векторов

Напомним, что скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между векторами; скалярное произведение двух векторов, хотя бы один из которых нулевой, считается равным нулю. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

Из определения скалярного произведения следует, что

- **для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;**
- **для любого вектора $\vec{a}$ справедливо неравенство $\vec{a}^2 \geqslant 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$;**
- **скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны** (т. е. угол между ними равен 90°).

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить, зная координаты $\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\{x_2; y_2; z_2\}$ этих векторов. В самом деле, если данные векторы — ненулевые, то, используя формулу (5) на с. 160, получаем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Эта формула верна и в том случае, когда один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или оба — нулевые (обоснуйте это). Итак,

- **скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что

- **для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:**
  1. $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
  2. $(k\vec{a})\,\vec{b} = k\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

9

Вопросы и задачи

145. а) Докажите, что вектор $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DA}$.

б) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами этого параллелепипеда, равный вектору $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BA}$.

в) Рёбра AB и AC тетраэдра $ABCD$ равны 7 и 24, угол BAC — прямой. Найдите $|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}|$.

г)* Докажите справедливость равенства $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

д)* Боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ — равносторонние треугольники. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MC}$, если $AB=1$.

146. а) Докажите, что вектор $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{BN}$.

б) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами этого параллелепипеда, равный вектору $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{DB_1}$.

в) Точка M — середина ребра AB тетраэдра $ABCD$. Найдите $|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{DC}|$, если $\angle ACB=90°$, $AB=6$.

г)* Докажите справедливость равенства $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+$ $+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{DE}$.

д)* Боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ — равносторонние треугольники, точка N — середина ребра MC. Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}$, если $AB=2$.

9

147. а) Даны векторы $\vec{a}\{3; -1; -2\}$, $\vec{b}\{-2; 3; 1\}$ и $\vec{c}\{-16; 10; 10\}$. Коллинеарны ли векторы $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$?

б) Точка M — середина диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. При каком значении k справедливо равенство $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{AC_1}$?

в)* Точка A лежит на положительной полуоси Oy, точка B — на положительной полуоси Ox, ребро BC тетраэдра $OABC$ перпендикулярно к плоскости ABO, а двугранный угол $BAOC$ равен 60°. Найдите координаты точки пересечения медиан грани ABC, если $AB=6$ и $\angle BAO=30°$.

г)* Докажите, что если векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ коллинеарны, то $x_1y_2-y_1x_2=0$, $y_1z_2-z_1y_2=0$ и $z_1x_2-x_1z_2=0$.

д)* Даны точки $A(-2; 3; 1)$ и $B(-4; -7; 12)$. Найдите координаты точки M, лежащей на прямой AB, если $AM=3$.

148. а) Даны векторы $\vec{a}\{2; 3; 1\}$, $\vec{b}\{-4; 6; 8\}$ и $\vec{c}\{-8; 6; 11\}$. Коллинеарны ли векторы $-2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{c}$?

б) Точка M — середина диагонали CA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. При каком значении k справедливо равенство $k(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{CA_1}$?

в)* Точка C лежит на положительной полуоси Oy, точка B — в плоскости Oxy и имеет отрицательную абсциссу, ребро AB тетраэдра $OABC$ перпендикулярно к плоскости OBC, $OB = 6$, $\angle ACO = 90°$, $\angle BOC = 60°$, а двугранный угол $ACOB$ равен $60°$. Найдите координаты точки пересечения медиан грани ABO.
г)* Докажите, что если $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$, $y_1z_2 - z_1y_2 = 0$ и $z_1x_2 - x_1z_2 = 0$, то векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ коллинеарны.
д)* Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(1; 2; -4)$. Найдите координаты точки M, лежащей на прямой AB, если $AM = 14$.

149. а) Диагонали грани BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке M. Разложите: вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$; вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CB}$.
б) При каких значениях x векторы $\vec{a}\{1; 2; 3\}$, $\vec{b}\{3; 2; x\}$ и $\vec{c}\{7; 2; -3\}$ компланарны?
в)* Разложите, если это возможно, вектор $\vec{d}\{5; 1; -4\}$ по векторам $\vec{a}\{2; 1; -1\}$, $\vec{b}\{1; 0; 2\}$ и $\vec{c}\{2; -1; 0\}$.

150. а) Отрезок CM — медиана грани BCD тетраэдра $ABCD$, точка E — середина отрезка CM. Разложите: вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$; вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$; вектор $\overrightarrow{DB}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BC}$.
б) При каких значениях x векторы $\vec{a}\{-3; 1; -2\}$, $\vec{b}\{-2; 2; -4\}$ и $\vec{c}\{x; -1; 2\}$ компланарны?
в)* Разложите, если это возможно, вектор $\vec{d}\{-2; 3; -3\}$ по векторам $\vec{a}\{-2; -3; 1\}$, $\vec{b}\{4; -3; -24\}$ и $\vec{c}\{-4; -3; 0\}$.

151. а) В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины рёбер AB и AC. Найдите $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MN}$, если $AB = 4$.
б) Найдите длину вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 2$.
в) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 2$.
г)* Диагонали грани $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке M, точка N — середина ребра AA_1. Найдите площадь треугольника MNC_1, если $AB = 4$, $AD = 3$ и $AA_1 = 8$.
д)* Точка $M(1; -1; 3)$ — середина ребра BC тетраэдра $ABCD$. Найдите высоту DH этого тетраэдра, если $AB = AC$, $BD = CD$, $A(-2; 1; -3)$ и $D(1; -4; 9)$.

152. а) Боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ — равносторонние треугольники. Найдите $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MD}$, если $AB = 5$.
б) Найдите $|2\vec{a} - \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\vec{a}\vec{b} = 8$.
в) Найдите косинус угла между векторами $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\vec{a}\vec{b} = 8$.
г)* Диагонали грани $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке M, точка N — середина ребра A_1B_1. Найдите площадь треугольника MNC_1, если $AB = 4$, $AD = AA_1 = 2$.
д)* Найдите площадь треугольника ABC с вершинами $A(3; -1; -3)$, $B(1; -1; 1)$ и $C(2; 2; 1)$.

§ 10

Применения векторов и координат в решениях задач

48 Уравнения сферы и плоскости

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и дана какая-нибудь поверхность P, например сфера или плоскость. Уравнение с тремя неизвестными x, y, z называется уравнением поверхности P в данной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M\,(x;\,y;\,z)$ поверхности P и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Выведем уравнение сферы радиуса R с центром $C\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ (рис. 190).

Квадрат расстояния от произвольной точки $M\,(x;\,y;\,z)$ пространства до точки $C\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ выражается формулой

$$MC^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2.$$

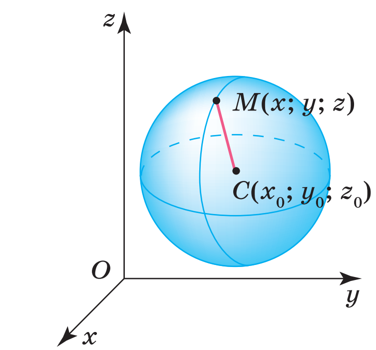
Если точка M лежит на сфере, то $MC = R$. Это равенство равносильно равенству $MC^2 = R^2$, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M\,(x;\,y;\,z)$ не лежит на сфере, то $MC^2 \neq R^2$, поэтому координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно,

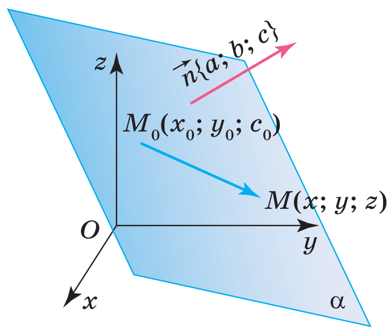
в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ имеет вид

$$\boldsymbol{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.}$$



$MC^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$

Рис. 190



$\overrightarrow{M_0M}\,\{x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0\}.$

Если $M \in \alpha$, то $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$

Рис. 191

* Перейдём теперь к выводу уравнения плоскости. Ненулевой вектор $\vec{n}$ назовём вектором нормали к плоскости α, если он лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости α. Отметим, что вектор нормали к плоскости перпендикулярен к любому ненулевому вектору, лежащему в этой плоскости (обоснуйте это).

Выведем уравнение плоскости α, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}\{a; b; c\}$ (рис. 191).

Если точка $M(x; y; z)$, отличная от точки M_0, лежит в плоскости α, то векторы $\vec{n}\{a; b; c\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Выразив скалярное произведение через координаты векторов, получим равенство

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \qquad (2)$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y; z)$, лежащей в плоскости α, в том числе и точки M_0 (проверьте это).

Если же точка $M(x; y; z)$ не лежит в плоскости α, то векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярны, и, следовательно, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2). Это позволяет сделать вывод:

в прямоугольной системе координат уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}\{a; b; c\}$, имеет вид

$$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

Отметим, что это уравнение можно записать в виде

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (3)$$

где $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Докажем, что любое уравнение вида (3), в котором хотя бы один из коэффициентов a, b и c отличен от нуля, является уравнением некоторой плоскости.

Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ — какая-то тройка чисел, удовлетворяющих уравнению (3) (докажите, что такие числа всегда найдутся, если $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), т. е. справедливо числовое равенство

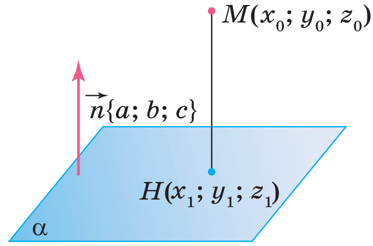
$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Заменим число 0 в правой части уравнения (3) суммой $ax_0 + by_0 + cz_0 + d$, равной нулю, а затем, сгруппировав попарно слагаемые, запишем уравнение (3) в виде

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Полученное уравнение является, как мы установили выше, уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}\{a; b; c\}$. Итак, уравнение (3) — это уравнение плоскости, а коэффициенты a, b и c являются координатами вектора нормали к этой плоскости. *

49* Расстояние от точки до плоскости



$\alpha : ax + by + cz + d = 0,$
$\vec{n} \perp \alpha,$
$\overrightarrow{MH}\ \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\} \perp \alpha,$
$\vec{n} \parallel \overrightarrow{MH}$

Рис. 192

Выведем формулу расстояния от точки до плоскости, если даны координаты точки и уравнение плоскости.

Пусть $M\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ — данная точка, $ax + by + cz + d = 0$ — уравнение данной плоскости α. Будем считать, что точка M не лежит в плоскости α, и проведём перпендикуляр MH к этой плоскости (рис. 192). Так как точка H лежит в плоскости α, то её координаты (обозначим их x_1, y_1 и z_1) удовлетворяют уравнению плоскости, т. е. справедливо равенство

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0. \qquad (4)$$

Каждый из векторов $\vec{n}\,\{a;\,b;\,c\}$ и $\overrightarrow{MH}\,\{x_1 - x_0;\,y_1 - y_0;\,z_1 - z_0\}$ является вектором нормали к плоскости α, поэтому эти векторы коллинеарны, и, следовательно, модуль их скалярного произведения равен произведению модулей этих векторов: $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MH}| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{MH}| = |\vec{n}| \cdot p$, где $p = |\overrightarrow{MH}|$ — искомое расстояние от точки M до плоскости α. Записывая выражение для скалярного произведения через координаты векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{MH}$ и учитывая, что

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$$

в силу равенства (4), получаем

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MH}| = |a\,(x_1 - x_0) + b\,(y_1 - y_0) + c\,(z_1 - z_0)| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|,$$

а так как $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то

$$p = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MH}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Заметим, что если точка $M\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ лежит в плоскости α, то числитель в выражении для p равен нулю, а поскольку для точки, лежащей в плоскости, естественно считать, что её расстояние от этой плоскости равно нулю, то полученная формула верна и в этом случае. Итак,

■ **расстояние p от точки $M\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, выражается формулой**

$$p = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad \textbf{(5)}$$

Рассмотрим две задачи на применение этой формулы.

10

• Задача

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 1$. Найти расстояние от вершины A до плоскости B_1CD_1.

▼ Решение

Введём прямоугольную систему координат с началом A так, как показано на рисунке 193. Тогда точки A, B_1, C и D_1 будут иметь координаты, указанные на этом рисунке.

Уравнение плоскости B_1CD_1 будем искать в виде

$$ax + by + cz + d = 0.$$

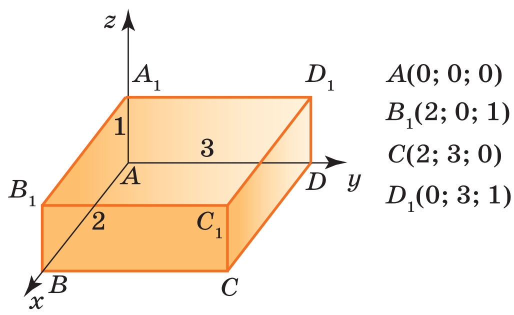


Рис. 193

Для нахождения коэффициентов a, b, c и d воспользуемся тем, что координаты точек B_1, C и D_1 удовлетворяют этому уравнению. Подставив поочерёдно координаты этих точек в искомое уравнение, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a + c + d = 0, \\ 2a + 3b + d = 0, \\ 3b + c + d = 0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений следует равенство $c = 3b$, а из второго и третьего уравнений — равенство $c = 2a$. Используя последнее равенство, из первого уравнения получаем $d = -2c$. Заметим теперь, что если обе части искомого уравнения плоскости разделить на какое-нибудь число, то получится равносильное уравнение той же самой плоскости. Поэтому один из искомых коэффициентов (в данной задаче любой) можно задать произвольно, при этом остальные коэффициенты определятся однозначно.

Положим $c = 6$, тогда из найденных соотношений для коэффициентов получим $a = 3$, $b = 2$, $d = -12$.

Итак, уравнение плоскости B_1CD_1 имеет вид

$$3x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

Применяя теперь формулу (5) для этого уравнения и точки $A\,(0; 0; 0)$, находим искомое расстояние p от точки A до плоскости B_1CD_1:

$$p = \frac{|-12|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{12}{7}. \ ▲$$

• Задача

Сфера задана уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 25$, а плоскость α — уравнением $2x - 6y + 3z - 7 = 0$. Определить взаимное расположение сферы и плоскости α.

10

▼ **Решение**

Центром данной сферы является точка $C(-1; 2; 0)$, а радиус сферы равен 5. По формуле (5) найдём расстояние p от точки C до плоскости α:

$$p = \frac{|2\cdot(-1)-6\cdot 2-7|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = 3.$$

Так как расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы ($p = 3 < 5 = R$), то сфера и плоскость α пересекаются по окружности. Радиус этой окружности равен $\sqrt{R^2 - p^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (докажите это). ▲

50* Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

На примере следующей задачи рассмотрим способ вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми, используя векторы и координаты.

● **Задача**

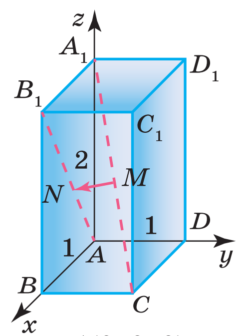
Основанием прямоугольного параллелепипеда с боковым ребром, равным 2, является квадрат, сторона которого равна 1. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ параллелепипеда, а другая — диагональ боковой грани.

▼ **Решение**

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = AD = 1$, $AA_1 = 2$, и найдём расстояние между скрещивающимися прямыми A_1C и AB_1.

10

Введём прямоугольную систему координат с началом A так, как показано на рисунке 194. Тогда точки A, A_1, B_1 и C будут иметь координаты, указанные на этом рисунке.



$A(0; 0; 0)$,
$A_1(0; 0; 2)$,
$B_1(1; 0; 2)$,
$C(1; 1; 0)$

Рис. 194

Пусть точки M и N — концы общего перпендикуляра к прямым A_1C и AB_1. Искомое расстояние равно MN. Представим вектор $\overrightarrow{MN}$ в виде

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1N}.$$

Векторы $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ и также векторы $\overrightarrow{B_1N}$ и $\overrightarrow{B_1A}$ коллинеарны, поэтому найдутся такие числа x и y, что $\overrightarrow{MA_1} = x \cdot \overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{B_1N} = y \cdot \overrightarrow{B_1A}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{MN} = x \cdot \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + y \cdot \overrightarrow{B_1A}. \quad (6)$$

По координатам точек A, A_1, B_1 и C найдём координаты векторов $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{B_1A}$:

$$\overrightarrow{CA_1}\{-1;\,-1;\,2\},\ \overrightarrow{A_1B_1}\{1;\,0;\,0\}\ \text{и}\ \overrightarrow{B_1A}\{-1;\,0;\,-2\},$$

а затем с помощью равенства (6) получим выражение для координат вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN}\{-x+1-y;\ -x;\ 2x-2y\}.$$

Чтобы найти неизвестные числа x и y, воспользуемся тем, что вектор $\overrightarrow{MN}$ перпендикулярен к векторам $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{B_1A}$ (поскольку отрезок MN — общий перпендикуляр к прямым A_1C и AB_1), и, следовательно, скалярные произведения $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1A}$ равны нулю. Записывая эти скалярные произведения через координаты векторов, получаем систему двух уравнений относительно x и y:

$$(-x+1-y)(-1)+(-x)(-1)+(2x-2y)2=0,$$
$$(-x+1-y)(-1)+(2x-2y)(-2)=0,$$

или

$$6x-3y=1,$$
$$3x-5y=-1.$$

Решая эту систему, находим: $x=\frac{8}{21}$, $y=\frac{3}{7}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты

$$\left\{-\frac{8}{21}+1-\frac{3}{7};\ -\frac{8}{21};\ \frac{16}{21}-\frac{6}{7}\right\}=\left\{\frac{4}{21};\ -\frac{8}{21};\ -\frac{2}{21}\right\}.$$

Искомое расстояние MN между скрещивающимися прямыми A_1C и AB_1 равно длине вектора $\overrightarrow{MN}$, т. е.

$$MN=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(\frac{4}{21}\right)^2+\left(-\frac{8}{21}\right)^2+\left(-\frac{2}{21}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Отметим, что, найдя числа x и y, мы можем теперь определить положения точек M и N на прямых A_1C и AB_1. Так как

$$\overrightarrow{MA_1}=x\overrightarrow{CA_1}=\frac{8}{21}\overrightarrow{CA_1},$$

то

$$\frac{MA_1}{CA_1}=\frac{8}{21},$$

и, значит, точка M делит диагональ A_1C в отношении $A_1M:MC=8:13$. Аналогично можно установить, что

$$AN:NB_1=4:3.$$

Таким же способом можно найти расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими другие диагонали этого параллелепипеда и его боковых граней. ▲

51 Вычисление углов между прямыми и плоскостями

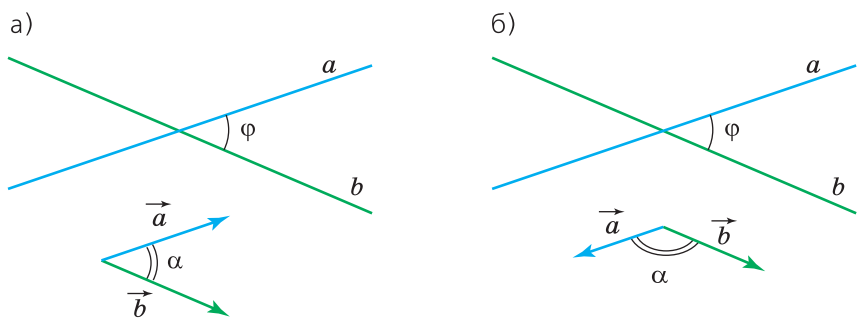
Ненулевой вектор называется <u>направляющим вектором прямой</u> a, если он лежит либо на прямой a, либо на прямой, параллельной прямой a.

Пусть угол между направляющими векторами двух прямых равен α. Если эти прямые пересекаются, то согласно определению угол φ между ними равен α при $\alpha \leqslant 90°$ (рис. 195, *а*) и $\varphi = 180° - \alpha$ при $\alpha > 90°$ (рис. 195, *б*).

Если две прямые — скрещивающиеся (обозначим их буквами a и b), то, чтобы определить угол между ними (см. с. 59), мы брали произвольную точку M и проводили через неё прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. Углом между скрещивающимися прямыми a и b мы назвали угол между пересекающимися прямыми a_1 и b_1. Поскольку $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$, то направляющие векторы прямых a и b являются также направляющими векторами прямых a_1 и b_1. Отсюда следует, что угол между скрещивающимися прямыми a и b не зависит от выбора точки M — он равен углу α между направляющими векторами этих прямых, если $\alpha \leqslant 90°$, и равен $180° - \alpha$, если $\alpha > 90°$.

Если две прямые параллельны, то будем считать, что угол между ними равен 0°. Таким образом, для любых двух прямых угол φ между ними удовлетворяет неравенствам $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Для вычисления угла между двумя прямыми, а также угла между прямой и плоскостью и угла между двумя плоскостями во многих случаях удобно использовать скалярное произведение векторов.



Если $\alpha \leqslant 90°$, то $\varphi = \alpha$.

$\cos\varphi = \cos\alpha = |\cos\alpha|$

Если $\alpha > 90°$, то $\varphi = 180° - \alpha$.

$\cos\varphi = -\cos\alpha = |\cos\alpha|$

Рис. 195

Задача

Найти угол между двумя прямыми, если известны координаты их направляющих векторов.

Решение

Пусть $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ — направляющие векторы прямых a и b. Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой (5) п. 43:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если $\alpha \leqslant 90°$, то искомый угол φ между прямыми a и b равен α, поэтому $\cos\varphi = \cos\alpha$, а если $\alpha > 90°$, то $\varphi = 180° - \alpha$ и $\cos\varphi = -\cos\alpha$. В любом случае $\cos\varphi = |\cos\alpha|$, поскольку $\cos\varphi \geqslant 0$ (так как $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$). Итак, косинус искомого угла φ выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (7)$$

Вычисленное значение $\cos\varphi$ позволяет найти сам угол φ.

В качестве примера найдём угол φ между скрещивающимися прямыми A_1C и AB_1 из предыдущей задачи (см. с. 178). Направляющие векторы $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{B_1A}$ этих прямых имеют следующие координаты (см. решение задачи на с. 179):

$$\overrightarrow{CA_1}\{-1; -1; 2\} \text{ и } \overrightarrow{B_1A}\{-1; 0; -2\}.$$

Применяя формулу (7), получаем

$$\cos\varphi = \frac{|(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-2)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{3}{10}}$. ▲

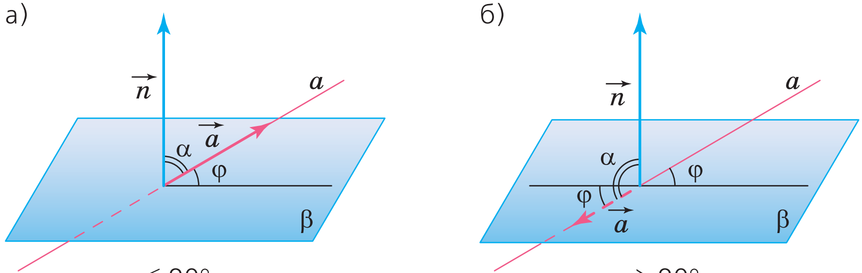
∗ Задача

Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и вектора нормали к плоскости.

Решение

Напомним, что углом между пересекающимися и не перпендикулярными прямой и плоскостью называется угол между прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость, а угол между прямой и перпендикулярной к ней плоскостью считается равным 90° (см. п. 6). Добавим к этому, что если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то будем считать, что угол между ними равен 0°. Таким образом, для любых прямой и плоскости угол φ между ними удовлетворяет неравенствам $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Пусть $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ — направляющий вектор прямой a, $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ — вектор нормали к плоскости β. Угол между этими векторами обозначим буквой α, а искомый угол между прямой a и плоскостью β — буквой φ.



$\alpha \leqslant 90°$,
$\varphi = 90° - \alpha$,
$\sin\varphi = \cos\alpha = |\cos\alpha|$

$\alpha > 90°$,
$\varphi = \alpha - 90°$,
$\sin\varphi = -\cos\alpha = |\cos\alpha|$

Рис. 196

Если $\alpha \leqslant 90°$, то $\varphi = 90° - \alpha$, поэтому $\sin\varphi = \cos\alpha$ (рис. 196, *а*), а если $\alpha > 90°$, то $\varphi = \alpha - 90°$ и $\sin\varphi = -\cos\alpha$ (рис. 196, *б*).

В любом случае $\sin\varphi = |\cos\alpha|$, и, следовательно, для $\sin\varphi$ получается такое же выражение через координаты векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{n}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, как и в правой части формулы (7).

Вычислив значение этого выражения для данных векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{n}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ и учитывая, что $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, можно найти угол φ. ▲

• * Задача

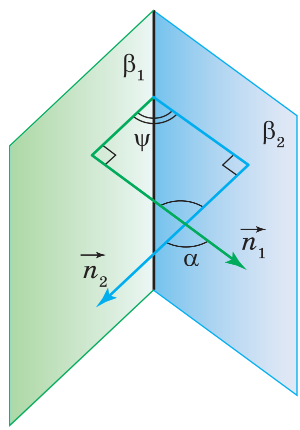
Найти угол между двумя плоскостями, если известны координаты векторов нормали к этим плоскостям.

▼ Решение

Напомним, что углом между двумя пересекающимися плоскостями называется величина наименьшего из четырёх двугранных углов с общим ребром, образованных этими плоскостями (см. п. 9). Если две плоскости параллельны, то будем считать, что угол между ними равен 0°. Таким образом, для любых двух плоскостей угол φ между ними удовлетворяет неравенствам $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Пусть $\vec{n_1}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{n_2}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — векторы нормали к плоскостям β_1 и β_2. Угол между этими векторами обозначим буквой α, а искомый угол между плоскостями β_1 и β_2 — буквой φ.

Используя рисунок 197, на котором буквой ψ обозначена величина одного из двугранных углов, образованных пло-



φ — угол между плоскостями β_1 и β_2,
$\varphi = \psi = 180° - \alpha$, если $\psi \leqslant 90°$;
$\varphi = 180° - \psi = \alpha$, если $\psi > 90°$

Рис. 197

скостями β_1 и β_2, докажите, что $\varphi=\alpha$, если $\alpha\leqslant 90^\circ$, и $\varphi=180^\circ-\alpha$, если $\alpha>90^\circ$. Из этих соотношений следует, что $\cos\varphi=|\cos\alpha|$, и, значит, для косинуса искомого угла φ получается такое же выражение через координаты векторов $\vec{n_1}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{n_2}\{x_2; y_2; z_2\}$, как в правой части формулы (7).

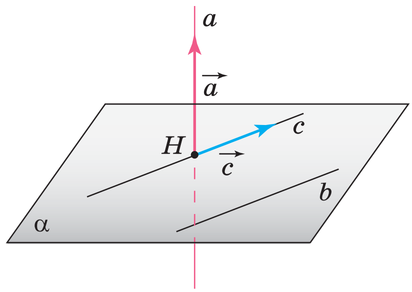
Вычислив значение $\cos\varphi$ и учитывая, что $0^\circ\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ$, можно найти угол φ. ▲

52* Обобщённый признак перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть прямая a перпендикулярна к плоскости α и пересекает её в точке H (рис. 198). Тогда согласно определению прямая a перпендикулярна к любой прямой, проходящей через точку H и лежащей в плоскости α.

Рассмотрим какую-нибудь прямую b, лежащую в плоскости α, но не проходящую через точку H, и докажем, что $a\perp b$.

Проведём через точку H прямую c, параллельную прямой b. Прямая c лежит в плоскости α (обоснуйте это), поэтому $a\perp c$, и, следовательно, направляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ этих прямых перпендикулярны. Но вектор $\vec{c}$ является также направляющим вектором прямой b, поскольку $b\parallel c$, а из перпендикулярности направляющих векторов прямых a и b следует, что $a\perp b$.



Если $a\perp\alpha$ и $b\subset\alpha$, то $a\perp b$

Рис. 198

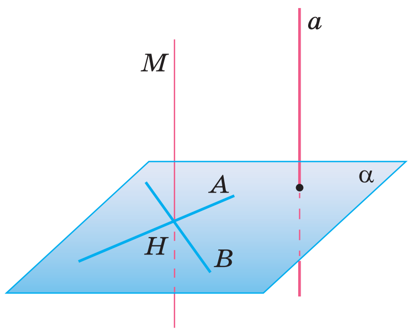
Таким образом, мы приходим к выводу:

- **если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.**

Рассмотрим теперь прямую a, перпендикулярную к пересекающимся прямым HA и HB плоскости α (рис. 199).

Если прямая a проходит через точку H, то $a\perp\alpha$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Если же прямая a не проходит через точку H, то проведём через точку H прямую HM, параллельную прямой a. Параллельные прямые a и HM имеют общий направляющий вектор, который перпендикулярен к векторам $\overrightarrow{HA}$ и $\overrightarrow{HB}$, поскольку $a\perp HA$ и $a\perp HB$. Следова-



Если $a\perp HA$ и $a\perp HB$, то $a\perp\alpha$

Рис. 199

тельно, прямая HM также перпендикулярна к прямым HA и HB, и, значит, $HM \perp \alpha$, а так как $a \parallel HM$, то $a \perp \alpha$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение (обобщённый признак перпендикулярности прямой и плоскости):

- **если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.**

53** Метод проекций в задачах на сечения многогранников

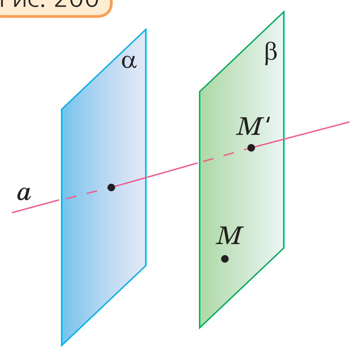
Проектирование параллельно плоскости. Как мы знаем, если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует такое число $k \neq 0$, что $\vec{b} = k\vec{a}$. В этом случае будем говорить, что отношение вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$ равно k, и использовать запись $\vec{b} : \vec{a} = k$.

Пусть точка C лежит на прямой AB и отлична от точек A и B. Будем говорить, что точка C делит отрезок AB в отношении $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB}$[1]. Если точка C лежит на отрезке AB (рис. 200), то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ одинаково направлены, поэтому $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} > 0$, а если точка C' лежит на прямой AB вне отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AC'}$ и $\overrightarrow{C'B}$ противоположно направлены, поэтому $\overrightarrow{AC'} : \overrightarrow{C'B} < 0$.

$\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} > 0, \ \overrightarrow{AC'} : \overrightarrow{C'B} < 0$

Рис. 200

Введём теперь понятие параллельной проекции на данную прямую a при проектировании параллельно данной плоскости α. Пусть прямая a пересекается с плоскостью α и пусть M — произвольная точка пространства. Проведём через точку M плоскость β, параллельную плоскости α (рис. 201). Если точка M лежит в плоскости α, то в качестве плоскости β возьмём саму плоскость α. Плоскость β пересекается с прямой a в некоторой точке M' (докажите это). Точку M' назовём проекцией точки M на прямую a при проектировании параллельно плоскости α (говорят также «при проектировании вдоль плоскости α»). Заметим, что точка M' является проекцией на



Точка M' – проекция точки M на прямую a при проектировании параллельно плоскости α

Рис. 201

[1] Отметим, что в этом определении существенно то, в каком порядке названы концы отрезка: отрезок BA делится точкой C в отношении $\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{CA}$.

прямую a любой точки, лежащей в плоскости β, в том числе и самой точки M'.

Если A' и B' — проекции точек A и B на прямую a, то вектор $\overrightarrow{A'B'}$ будем называть проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую a (при проектировании параллельно плоскости α).

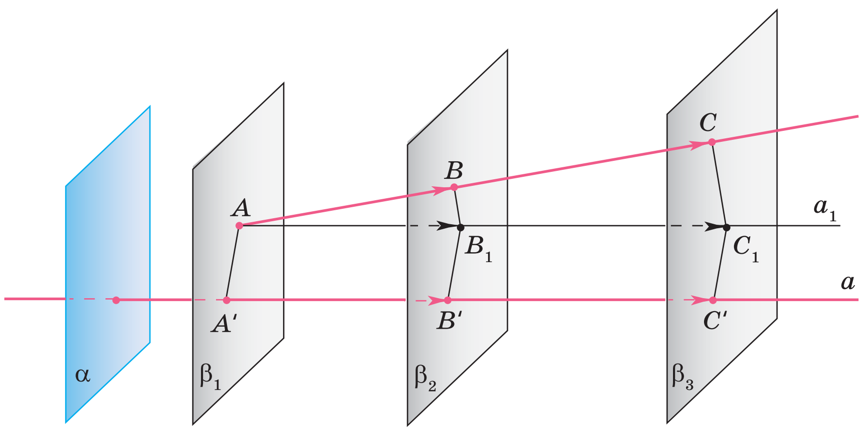
Справедливо утверждение, которое можно назвать теоремой Фалеса для векторов:

при проектировании на прямую параллельно плоскости отношение коллинеарных векторов, не параллельных этой плоскости, сохраняется.

Докажем это утверждение для случая, представленного на рисунке 202, где точки A, B и C лежат на прямой, не параллельной прямой a, а точки A', B' и C' — проекции точек A, B и C на прямую a при проектировании параллельно плоскости α, т. е. в точках A', B' и C' прямая a пересекается с плоскостями β_1, β_2 и β_3, параллельными плоскости α и проходящими через точки A, B и C. Требуется доказать, что для коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и их проекций на прямую a, т. е. векторов $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{B'C'}$, выполняется пропорция

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'C'}. \qquad (8)$$

Проведём через точку A прямую a_1, параллельную прямой a. Она пересекается с плоскостями β_2 и β_3 в некоторых точках B_1 и C_1.



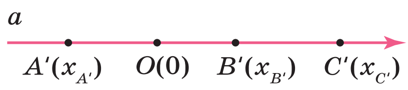
Векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{B'C'}$ — проекции векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ на прямую a при проектировании параллельно плоскости α:

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'C'}$$

Рис. 202

Прямые BB_1 и CC_1 являются линиями пересечения параллельных плоскостей β_2 и β_3 с плоскостью, проходящей через прямые AB и a_1, поэтому $BB_1 \parallel CC_1$ (по свойству 6° п. 14). Следовательно, выполняется пропорция $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$, или, что то же самое,

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{B_1C_1}. \qquad (9)$$



$$\overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'C'} = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{x_{C'} - x_{B'}}$$

Рис. 203

Отрезки AB_1 и $A'B'$ и также B_1C_1 и $B'C'$ являются отрезками параллельных прямых, заключёнными между параллельными плоскостями, поэтому эти отрезки равны (по свойству 7° п. 14), и, следовательно, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B'C'}$. Используя эти равенства, из формулы (9) получаем искомую пропорцию (8).

Сделаем теперь прямую a осью координат, отметив на ней какую-нибудь точку O в качестве начала координат и выбрав положительную полуось. Координату точки A' будем обозначать $x_{A'}$ и аналогичные обозначения будем использовать для других точек на оси координат (рис. 203). Для любых трёх точек A', B' и C' справедливо равенство

$$\overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'C'} = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{x_{C'} - x_{B'}}. \qquad (10)$$

Оно следует из того, что отношение $\overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'C'}$ равно отношению длин векторов $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{B'C'}$, взятому со знаком «плюс», если эти векторы одинаково направлены, и со знаком «минус», если они противоположно направлены, а длины этих векторов равны соответственно $|x_{B'} - x_{A'}|$ и $|x_{C'} - x_{B'}|$.

Формулы (8) и (10) будем использовать при решении задач на сечения.

Метод проекций в задачах на сечения многогранников

Задача

В тетраэдре $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N так, что $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KD} = 1$, $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MC} = 2$, $\overrightarrow{BL} : \overrightarrow{LC} = 3$ и $\overrightarrow{DN} : \overrightarrow{NL} = 1$ (рис. 204). В каком отношении плоскость KMN делит:

а) ребро BD;

б) отрезок DE, где E — точка пересечения медиан грани ABC?

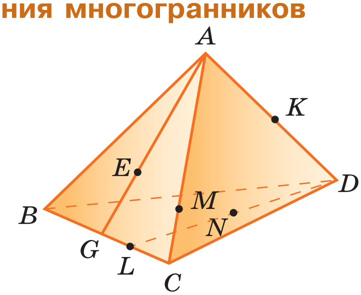


Рис. 204

Решение

Пусть плоскость KMN пересекает прямую BD в точке P, а прямую DE в точке Q. Требуется найти отношения $\overrightarrow{BP}:\overrightarrow{PD}$ и $\overrightarrow{DQ}:\overrightarrow{QE}$.

а) Обозначим буквой a какую-нибудь прямую, пересекающуюся с плоскостью KMN в некоторой точке O, и рассмотрим проекции точек на прямую a при проектировании параллельно плоскости KMN. Проекцию точки будем обозначать той же буквой, что и саму точку, но со штрихом (например, A' — проекция точки A). Выберем прямую a в качестве оси координат, приняв точку O за начало координат. Тогда точки K', M', N', P' и Q' будут иметь координату, равную нулю, поскольку они совпадают с точкой O.

Пусть координата точки A' равна x, т. е. $x_{A'}=x$. Так как согласно формуле (8)

$$\overrightarrow{A'K'}:\overrightarrow{K'D'}=\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KD}=1,$$

то, используя формулу (10) и учитывая, что $x_{K'}=0$, получаем

$$\overrightarrow{A'K'}:\overrightarrow{K'D'}=\frac{x_{K'}-x_{A'}}{x_{D'}-x_{K'}}=-\frac{x_{A'}}{x_{D'}}=1,$$

откуда $x_{D'}=-x_{A'}=-x$. Аналогично, используя равенства $\overrightarrow{A'M'}:\overrightarrow{M'C'}=3$ и $\overrightarrow{D'N'}:\overrightarrow{N'L'}=1$ (они получаются из условия задачи в силу формулы (8)), приходим к равенствам

$$\frac{x_{M'}-x_{A'}}{x_{C'}-x_{M'}}=2 \quad \text{и} \quad \frac{x_{N'}-x_{D'}}{x_{L'}-x_{N'}}=1,$$

откуда, учитывая, что $x_{M'}=x_{N'}=0$, находим координаты точек C' и L': $x_{C'}=-\dfrac{x}{2}$ и $x_{L'}=x$.

Точно так же равенства

$$\overrightarrow{B'L'}:\overrightarrow{L'C'}=\overrightarrow{BL}:\overrightarrow{LC}=3 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{B'L'}:\overrightarrow{L'C'}=\frac{x_{L'}-x_{B'}}{x_{C'}-x_{L'}}$$

позволяют найти координату точки B': $x_{B'}=\dfrac{11}{2}x$. Зная координаты точек B' и D', находим искомое отношение (снова используя формулы (8) и (10), а также равенство $x_{P'}=0$):

$$\overrightarrow{BP}:\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{B'P'}:\overrightarrow{P'D'}=\frac{x_{P'}-x_{B'}}{x_{D'}-x_{P'}}=\frac{11}{2}.$$

б) Обозначим буквой G середину отрезка BC (см. рис. 204). Тогда $\overrightarrow{B'G'}:\overrightarrow{G'C'}=\overrightarrow{BG}:\overrightarrow{GC}=1$ и $\overrightarrow{B'G'}:\overrightarrow{G'C'}=\dfrac{x_{G'}-x_{B'}}{x_{C'}-x_{G'}}$ (см. формулу (10)). Используя эти равенства, находим координату точки G': $x_{G'}=\dfrac{5}{2}x$.

Точка E лежит на медиане AG грани ABC и делит эту медиану в отношении $\overrightarrow{AE}:\overrightarrow{EG}=2$, поэтому $\overrightarrow{A'E'}:\overrightarrow{E'G'}=2$. Отсюда, зная коорди-

10

наты точек A' и G', находим координату точки E': $x_{E'} = 2x$. Применяя снова формулы (8) и (10) и учитывая, что $x_{Q'} = 0$, получаем

$$\overrightarrow{DQ} : \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{D'Q'} : \overrightarrow{Q'E'} = \frac{x_{Q'} - x_{D'}}{x_{E'} - x_{Q'}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PD} = \frac{11}{2}$, $\overrightarrow{DQ} : \overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}$. ▲

Замечание. Достоинство метода проекций состоит в том, что он позволяет найти отношение, в котором секущая плоскость делит данный отрезок (и тем самым найти положение точки пересечения секущей плоскости с этим отрезком или его продолжением), не строя сечения на чертеже.

• Задача

На рёбрах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ или их продолжениях отмечены точки K и M так, что $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KB} = -3$ и $\overrightarrow{B_1M} : \overrightarrow{MC_1} = 2$ (рис. 205).

В каком отношении делит рёбра параллелепипеда плоскость α, проходящая через точки K и M параллельно прямой BD_1?

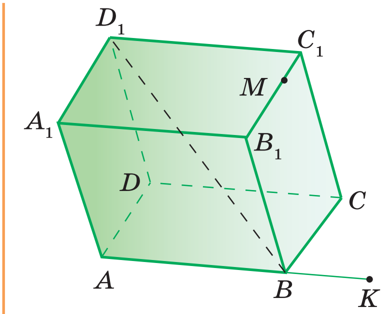


Рис. 205

▼ Решение

Обозначим буквой a какую-нибудь прямую, пересекающуюся с плоскостью α в некоторой точке O, и рассмотрим проекции вершин параллелепипеда на ось a при проектировании параллельно плоскости α (в качестве начала координат на оси a возьмём точку O, а проекции точек и их координаты на оси a будем обозначать той же буквой, что и саму точку, но со штрихом).

Пусть $x_{B'} = x$ и $x_{C_1'} = y$. Тогда $x_{A'} = 3x$ и $x_{B_1'} = -2y$ (это следует из условия задачи таким же образом, как и в предыдущей задаче). Так как $BD_1 \parallel \alpha$ (по условию), то точки B' и D_1' совпадают, поэтому $x_{D_1'} = x_{B'} = x$, а поскольку $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{B_1'C_1'} = \overrightarrow{B'C'}$, и, следовательно, $x_{C_1'} - x_{B_1'} = x_{C'} - x_{B'}$, т. е. $3y = x_{C'} - x$, откуда $x_{C'} = x + 3y$.

Аналогично из равенства $\overrightarrow{D_1'D'} = \overrightarrow{C_1'C'}$ следует, что $x_{D'} - x_{D_1'} = x_{C'} - x_{C_1'}$, откуда находим: $x_{D'} = x_{D_1'} + x_{C'} - x_{C_1'} = 2x + 2y$. Наконец, из равенства $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$ получаем $x_{D'} - x_{A'} = x_{C'} - x_{B'}$, т. е. $-x + 2y = 3y$, и, значит, $y = -x$.

В результате координаты проекций всех вершин параллелепипеда можно выразить через координату x точки B':

$$x_{A'} = 3x,\ x_{B'} = x,\ x_{C'} = -2x,\ x_{D'} = 0,\ x_{B_1'} = 2x,\ x_{C_1'} = -x,\ x_{D_1'} = x,$$

а для нахождения $x_{A_1'}$ воспользуемся равенством $\overrightarrow{A'A_1'} = \overrightarrow{B'B_1'}$, или $x_{A_1'} - x_{A'} = x_{B_1'} - x_{B'}$, откуда находим: $x_{A_1'} = 4x$.

Равенство $x_{D'} = 0$ означает, что плоскость α проходит через вершину D, а выражения для координат проекций остальных вершин параллелепипеда позволяют найти отношения, в которых плоскость α делит рёбра, не содержащие вершину D. Например, если P — точка пересечения плоскости α с прямой AA_1, то

$$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{A'P'} : \overrightarrow{P'A'_1} = \frac{x_{P'} - x_{A'}}{x_{A'_1} - x_{P'}} = -\frac{x_{A'}}{x_{A'_1}} = -\frac{3}{4}.$$

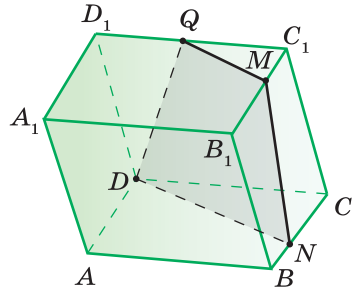


Рис. 206

Отсюда следует, что точка P лежит на продолжении ребра AA_1 за точку A, причём $AP = 3AA_1$.

Таким же образом можно найти точки пересечения плоскости α с прямыми, содержащими другие рёбра параллелепипеда, что даёт возможность построить сечение на чертеже. Это сечение (четырёхугольник $DNMQ$) изображено на рисунке 206, где $\overrightarrow{BN} : \overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}$, $C_1Q : QD_1 = 1$. ▲

Вопросы и задачи

153. а) Напишите уравнение сферы радиуса R с центром A, если: $R = 1$ и $A\,(1; -2; 0)$; $R = 5$ и $A\,(0; 3; -4)$.

б) Напишите уравнение сферы с центром A, проходящей через точку B, если: $A\,(0; 0; 0)$ и $B\,(1; 1; 1)$; $A\,(1; -2; 2)$ и $B\,(0; 0; 0)$.

в) Докажите, что каждое из следующих уравнений является уравнением сферы, и найдите радиус этой сферы и координаты её центра: $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 15$.

г) Найдите координаты точки пересечения сферы с центром $C\,(1; -2; 0)$ радиуса $\sqrt{13}$ с осью Ox.

д)* Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A\,(2; -1; 3)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}\,\{3; 2; -1\}$.

е)* Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M\,(2; -3; -1)$ и параллельной плоскости, заданной уравнением $3x + y - 2z - 6 = 0$.

ж)* Докажите, что сфера с центром $C\,(3; -4; -5)$ радиуса 5 касается плоскости Oxy, и найдите координаты точки касания.

з)* Докажите, что любая плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz = 0$, пересекается с любой сферой с центром в начале координат.

и)* Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M\,(2; -4; 4)$ и касающейся в этой точке сферы с центром в начале координат.

к)* Напишите уравнение плоскости, касающейся в точке $M\,(2; 1; -2)$ сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

154. а) Напишите уравнение сферы радиуса R с центром A, если: $R = 2$ и $A\,(-1; 2; 2)$; $R = 3$ и $A\,(4; -3; -3)$.

б) Напишите уравнение сферы с центром A, проходящей через точку B, если: $A(-1; 3; 4)$ и $B(1; -1; 0)$; $A(3; -4; 2)$ и $B(-1; 1; 2)$.

в) Докажите, что каждое из следующих уравнений является уравнением сферы, и найдите радиус этой сферы и координаты её центра:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 + 12 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0.$$

г) С какими осями координат пересекается сфера с центром $C(-1; 2; 2)$ радиуса 2,5?

д)* Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; -3; 2)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}\{-2; 0; 1\}$.

е)* Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-5; 6; 3)$ и параллельной плоскости, заданной уравнением $-y + z = 0$.

ж)* Докажите, что сфера с центром $C(-6; 8; 3)$ радиуса 10 касается оси Oz, и найдите координаты точки касания.

з)* Докажите, что любая плоскость, заданная уравнением $ax + by + d = 0$, где $d \neq 0$, параллельна оси Oz.

и)* Плоскость α проходит через точку $M(-3; 6; -6)$ и касается в этой точке сферы с центром в начале координат. Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости α и касающейся той же сферы.

к)* Напишите уравнение сферы радиуса 15, касающейся в точке $M(3; -2; 1)$ плоскости, заданной уравнением $-(x - 3) - 2(y + 2) + 2(z - 1) = 0$.

155. а)* Найдите расстояния от точек $A(1; -2; 3)$ и $B(3; 0; 5)$ до плоскости, заданной уравнением $x - 2y + 2z - 5 = 0$.

б)* Напишите уравнение плоскости β, проходящей через точку $M(-1; 3; -5)$ и параллельной плоскости α, заданной уравнением $2x - 2y + z - 2 = 0$, и найдите расстояние между плоскостями α и β.

в)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 1$ и $AA_1 = 4$. Найдите расстояния от вершин A_1 и B до плоскости ACD_1.

г)* Вершины A, B и C тетраэдра $OABC$ лежат соответственно на положительных полуосях Ox, Oy и Oz так, что $OA = a$, $OB = b$ и $OC = c$. Найдите уравнение плоскости ABC и расстояние от точки O до этой плоскости.

д)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, такой же, как и в задаче в. Пересекаются ли: плоскость ACD_1 и сфера с центром B радиуса 1? плоскость ACD_1 и сфера с центром B_1 радиуса 1? Если какая-то из этих сфер пересекается с плоскостью ACD_1, то найдите радиус r окружности, по которой они пересекаются.

156. а)* Найдите расстояния от точек $A(1; -2; 3)$ и $B(3; 0; 5)$ до плоскости, заданной уравнением $-3x + 6y + 6z + 7 = 0$.

б)* Напишите уравнение плоскости β, проходящей через точку $M(7; -2; -4)$ и параллельной плоскости α, заданной уравнением $12y - 5z - 8 = 0$, и найдите расстояние между плоскостями α и β.

в)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 1$ и $AA_1 = 4$. Найдите расстояния от вершин B_1 и C_1 до плоскости ACD_1.

г)* Вершины A, B и C тетраэдра $OABC$ лежат соответственно на положительных полуосях Ox, Oy и Oz так, что $OA = 4$, $OB = 3$ и $OC = 12$. Найдите расстояние от точки $M\,(-8;\ 6;\ 6)$ до плоскости ABC.

д)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, такой же, как и в задаче в. Пересекаются ли: плоскость BC_1D и сфера с центром A радиуса 1? плоскость BC_1D и сфера с центром A_1 радиуса 1? Если какая-то из этих сфер пересекается с плоскостью BC_1D, то найдите радиус r окружности, по которой они пересекаются.

157. а)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$ и $AA_1 = 1$. Найдите: 1) расстояние между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1C; 2) угол между прямыми A_1B и B_1C; 3) угол между прямой DD_1 и плоскостью A_1BC_1; 4) угол между плоскостями A_1BC_1 и AB_1D_1.

б)* В тетраэдре $DABC$ все плоские углы с вершиной D — прямые, $DA = DB = DC = 2$, точки K и M — середины рёбер AD и BD. Найдите: 1) расстояние между скрещивающимися прямыми AM и CK; 2) угол между прямыми AM и CK; 3) угол между прямой AB и плоскостью BCK; 4) угол между плоскостями ACM и BCK.

в)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 вдвое больше ребра AB, равного ребру BC. Точка M лежит на ребре B_1C_1 и делит его в отношении $B_1M : MC_1 = 2 : 1$, а диагонали параллелепипеда пересекаются в точке N. Найдите угол между: 1) прямыми AD_1 и MN; 2) прямой AM и плоскостью A_1B_1N; 3) плоскостями A_1B_1N и BDM.

г)* Докажите, что скрещивающиеся прямые, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, перпендикулярны.

д)* Все плоские углы трёхгранного угла $OABC$ — прямые. Найдите угол между биссектрисами углов AOB и BOC.

158. а)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = a$, $AD = b$ и $AA_1 = c$. Найдите: 1) расстояние между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1C; 2) угол между прямыми A_1B и B_1C; 3) угол между прямой DD_1 и плоскостью A_1BC_1; 4) угол между плоскостями A_1BC_1 и AB_1D_1.

б)* В тетраэдре $DABC$ все плоские углы с вершиной D — прямые, $DA = 2a$, $DB = 2b$, $DC = 2c$, точки K и M — середины рёбер AD и BD. Найдите: 1) расстояние между скрещивающимися прямыми AM и CK; 2) угол между прямыми AM и CK; 3) угол между прямой AB и плоскостью BCK; 4) угол между плоскостями ACM и BCK.

в)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 вдвое меньше ребра AB, равного ребру BC. Точка M лежит на ребре B_1C_1 и делит его в отношении $B_1M : MC_1 = 1 : 2$, а диагонали параллелепипеда пере-

10

секаются в точке N. Найдите угол между: 1) прямыми AD_1 и MN; 2) прямой AM и плоскостью A_1B_1N; 3) плоскостями A_1B_1N и BDM.
г)* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна к плоскостям A_1BD и B_1CD_1.
д)* Все плоские углы трёхгранного угла $OABC$ — прямые, лучи OA_1, OB_1 и OC_1 — биссектрисы углов BOC, COA и AOB. Найдите угол между: 1) прямой OA_1 и плоскостью B_1OC_1; 2) плоскостями A_1OB_1 и B_1OC_1.

159. а) Рёбра AD и BC тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны, $\angle ABC = 90°$. Докажите, что прямая BC перпендикулярна к плоскости ABD.
б) Отрезок DH — высота тетраэдра $ABCD$, $AH \perp BC$. Докажите, что $AD \perp BC$.
в) Отрезки MH и MA — перпендикуляр и наклонная, проведённые из точки M к плоскости α, $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой a, лежащей в плоскости α. Докажите, что $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{HA} \cdot \vec{a}$.
г)* Отрезки AH_1 и BH_2 — высоты тетраэдра $ABCD$. Докажите, что если прямые AH_1 и BH_2 пересекаются, то плоскость, содержащая эти прямые, перпендикулярна к прямой CD.
д)* Отрезок DH — высота тетраэдра $ABCD$, точка H — ортоцентр грани ABC. Докажите, что противоположные рёбра этого тетраэдра взаимно перпендикулярны.
е)* Докажите, что если три высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то его противоположные рёбра взаимно перпендикулярны.

160. а) Ребро BD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $\angle ACB = 90°$. Докажите, что прямая AC перпендикулярна к плоскости BCD.
б) Отрезок DH — высота тетраэдра $ABCD$, $AD \perp BC$. Докажите, что $AH \perp BC$.
в) Докажите, что прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к проекции наклонной к этой плоскости, перпендикулярна и к самой наклонной; обратно: прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к наклонной, перпендикулярна и к проекции наклонной (обобщённая теорема о трёх перпендикулярах).
г)* Докажите, что если три прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке, то основания высот являются ортоцентрами граней тетраэдра.
д)* Докажите, что если основанием одной из высот тетраэдра является ортоцентр грани, то основаниями остальных высот также являются ортоцентры граней.
е)* Докажите, что если рёбра AB и CD, а также рёбра AC и BD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке.

10

161. а)* На рёбрах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки K, L и M так, что $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KA_1} = 2$, $\overrightarrow{D_1L} : \overrightarrow{LC_1} = 1$ и $\overrightarrow{BM} : \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}$. Найдите, в каких отношениях точки пересечения плоскости KLM с отрезками AC_1, AC и BD (или их продолжениями) делят эти отрезки, и постройте на чертеже сечение параллелепипеда этой плоскостью.

б)* На рёбрах треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки D, E и F так, что $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DA_1} = 1$, $\overrightarrow{BE} : \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}$ и $\overrightarrow{C_1F} : \overrightarrow{FA_1} = 3$. Найдите, в каких отношениях точки пересечения плоскости DEF с отрезками AC и B_1C (или их продолжениями) делят эти отрезки, и постройте на чертеже сечение призмы этой плоскостью.

в)* Точки E, F, P и Q — середины рёбер AB, CD, BD и AC тетраэдра $ABCD$, а точки K, L и M отмечены так, что $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KD} = 1$, $\overrightarrow{CL} : \overrightarrow{LD} = 2$ и $\overrightarrow{EM} : \overrightarrow{MF} = 3$. Найдите, в каких отношениях точки пересечения плоскости KLM с отрезками BC и PQ (или их продолжениями) делят эти отрезки, и постройте на чертеже сечение тетраэдра этой плоскостью.

162. а)* Плоскость, параллельная прямой AC_1, пересекает рёбра AA_1 и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в точках M и N так, что $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MA_1} = 1$ и $\overrightarrow{BN} : \overrightarrow{NB_1} = 2$. Найдите отношения, в которых точки пересечения этой плоскости с отрезками AB, B_1C_1 и A_1C (или их продолжениями) делят эти отрезки, и постройте на чертеже сечение параллелепипеда этой плоскостью.

б)* В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы основания ABC пересекаются в точке M. Плоскость α проходит через точку M и параллельна прямым AB_1 и A_1C. Найдите отношения, в которых точки пересечения плоскости α с отрезками A_1B и CC_1 (или их продолжениями) делят эти отрезки, и постройте на чертеже сечение призмы этой плоскостью.

в)* В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ отмечены точки P, Q и R так, что $\overrightarrow{MP} : \overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}$, $\overrightarrow{MQ} : \overrightarrow{QB} = 1$ и $\overrightarrow{DR} : \overrightarrow{RC} = 2$. Найдите отношения, в которых точки пересечения плоскости PQR с отрезками MD и BC (или их продолжениями) делят эти отрезки, и постройте на чертеже сечение пирамиды этой плоскостью.

§ 11

Преобразования пространства

11

54 Движения пространства

Понятие движения пространства было введено в п. 17. Напомним, что движением пространства называется такое отображение пространства на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.

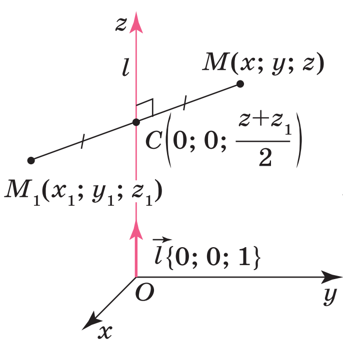
С помощью понятия движения мы дали определение равных фигур в пространстве: две фигуры называются равными, если существует движение пространства, при котором одна из этих фигур переходит в другую.

Можно доказать, что при любом движении пространства отрезок переходит в равный ему отрезок, луч — в луч, прямая — в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, угол — в равный ему угол, плоскость — в плоскость. Доказательства этих утверждений для прямой и плоскости приведены в приложении «Система аксиом геометрии» (см. с. 241).

Рассмотрим пример движения пространства. Возьмём какую-нибудь прямую l и поставим в соответствие каждой точке M точку M_1, симметричную точке M относительно прямой l. В результате получим отображение пространства на себя, которое называется <u>осевой симметрией</u>; прямая l называется при этом <u>осью симметрии</u>. Докажем, что осевая симметрия является движением пространства, т. е. при осевой симметрии сохраняются расстояния между точками.

С этой целью введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии (рис. 207), и установим связь между координатами точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно оси Oz. Если точка M не лежит на оси Oz, то согласно определению точек, симметричных относительно прямой, ось Oz пересекает отрезок MM_1 в его середине (точка $C\left(0; 0; \frac{z+z_1}{2}\right)$ на рисунке 207) и перпендикулярна к этому отрезку. Так как каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов, то $\frac{x+x_1}{2}=0$ и $\frac{y+y_1}{2}=0$, откуда получаем $x_1=-x$ и $y_1=-y$, а поскольку $MM_1 \perp Oz$, то векторы $\overrightarrow{MM_1}\{x_1-x; y_1-y; z_1-z\}$ и $\vec{l}\{0; 0; 1\}$ перпендикулярны (вектор $\vec{l}$ является направляющим вектором оси Oz, что очевидно). Поэтому скалярное произведение $\overrightarrow{MM_1}\cdot\vec{l}$ равно нулю, т. е. (запишем скалярное произведение в координатах)

$$(x-x_1)\cdot 0+(y-y_1)\cdot 0+(z-z_1)\cdot 1=0,$$



Точки M и M_1 симметричны относительно оси Oz:
$x_1=-x$, $y_1=-y$, $z_1=z$

Рис. 207

откуда $z_1 = z$. Полученные формулы, выражающие координаты точки M_1 через координаты точки M, верны и в том случае, когда точка M лежит на оси Oz (обоснуйте это). Итак, точка M_1, симметричная точке $M(x; y; z)$ относительно оси Oz, имеет следующие координаты: $M_1(-x; -y; z)$.

Рассмотрим теперь две произвольные точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. При осевой симметрии относительно оси Oz они переходят в точки $A_1(-x_1; -y_1; z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Сравнивая эти выражения, приходим к равенству $A_1B_1 = AB$. Таким образом, при осевой симметрии сохраняются расстояния между точками, т. е. осевая симметрия является движением пространства.

Замечание. Обратимся снова к рисунку 207 и заметим, что если отрезок MM_1 повернуть вокруг оси Oz на 180° так, чтобы в процессе поворота точка C оставалась на месте, а сам отрезок оставался перпендикулярным к оси Oz, то точка M перейдёт в точку M_1 и наоборот. Таким образом, с точки зрения наглядности осевую симметрию пространства с осью l можно представить как поворот пространства вокруг прямой l на 180°. В связи с этим отметим, что осевая симметрия на плоскости не является поворотом плоскости.

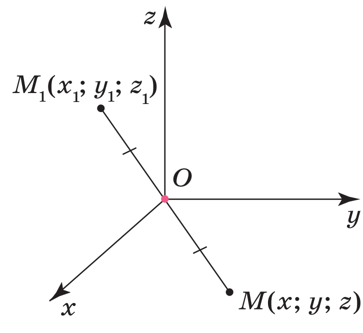
55 Некоторые виды движений

Рассмотрим другие виды движений пространства.

Отметим какую-нибудь точку O и поставим в соответствие каждой точке M пространства точку M_1, симметричную точке M относительно точки O. Получится отображение пространства на себя, которое называется центральной симметрией с центром O. Центральная симметрия является движением пространства.

Чтобы доказать это, введём прямоугольную систему координат $Oxyz$, началом которой является центр симметрии (рис. 208). Тогда координаты точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричной точке $M(x; y; z)$ относительно центра симметрии (точки O), будут связаны с координатами точки M формулами (обоснуйте их)

$$x_1 = -x, \quad y_1 = -y, \quad z_1 = -z.$$

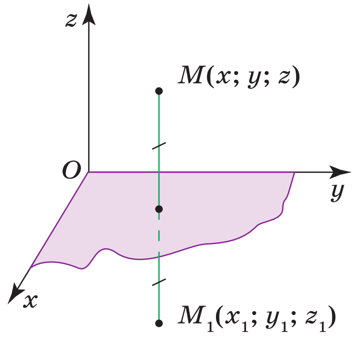


Точки M и M_1 симметричны относительно оси O:
$x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$

Рис. 208

Используя эти формулы, нетрудно доказать (сделайте это), что при центральной симметрии сохраняются расстояния между точками, т. е. центральная симметрия является движением пространства.

Замечание. В курсе планиметрии мы отмечали, что центральная симметрия на плоскости является поворотом на 180° вокруг центра симметрии. В отличие от этого центральная симметрия в пространстве не является поворотом.



Точки M и M_1 симметричны относительно плоскости Oxy:
$x_1 = x, y_1 = y, z_1 = -z$

Рис. 209

Ещё одним примером движения пространства является зеркальная симметрия. Возьмём какую-нибудь плоскость α и поставим в соответствие каждой точке M пространства точку M_1, симметричную точке M относительно плоскости α. Получится отображение пространства на себя, которое и называется зеркальной симметрией, плоскость α называется при этом плоскостью симметрии.

Чтобы доказать, что зеркальная симметрия является движением, введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии (рис. 209). Тогда координаты точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричной точке $M(x; y; z)$ относительно плоскости симметрии (плоскости Oxy), будут связаны с координатами точки M формулами (обоснуйте их)

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = -z.$$

Используя эти формулы, нетрудно доказать (сделайте это), что при зеркальной симметрии сохраняются расстояния между точками, т. е. зеркальная симметрия является движением пространства.

Рассмотрим, наконец, ещё один вид движения пространства. Возьмём какой-нибудь вектор $\vec{a}$ и поставим в соответствие каждой точке M пространства такую точку M_1, что $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$ (рис. 210, *а*). Получится отображение пространства на себя, которое называется параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Докажем, что параллельный перенос является движением пространства.

Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка A переходит в точку A_1, а точка B — в точку B_1, т. е. $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$ (рис. 210, *б*). Тогда по правилу сложения векторов

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a} + \overrightarrow{A_1B_1} \text{ и } \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{a}.$$

Сравнивая два выражения для вектора $\overrightarrow{AB_1}$, приходим к равенству $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, откуда следует, что $A_1B_1 = AB$. Таким образом, при парал-

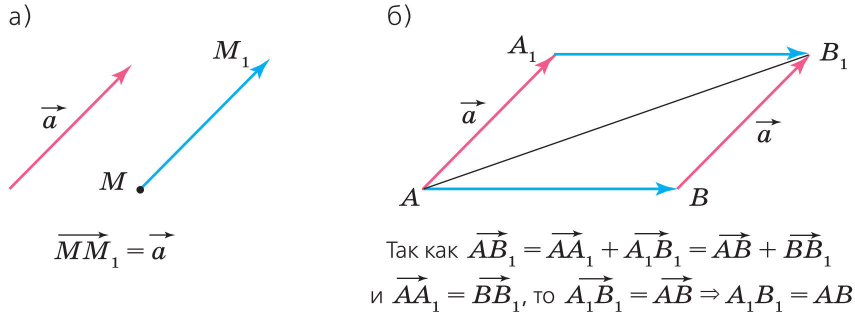


Рис. 210

лельном переносе сохраняются расстояния между точками, т. е. параллельный перенос является движением пространства.

Отметим, что если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ каждая точка пространства отображается на себя. Такое отображение называется <u>тождественным преобразованием</u> пространства.

Замечание. Ранее на с. 82 мы дали определение многогранника, называемого призмой. При этом рассматривались параллельные плоскости α и β, в которых расположены многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ с соответственно равными сторонами (см. рис. 95). Было сказано, что плоскость α можно наложить на плоскость β так, что совместятся соответствующие вершины этих многоугольников, и, следовательно, эти многоугольники равны. Теперь, используя параллельный перенос, можно обосновать это утверждение следующим образом: при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ многоугольник $A_1A_2...A_n$ переходит в многоугольник $B_1B_2...B_n$, а поскольку параллельный перенос является движением, то эти многоугольники равны по определению равных фигур в пространстве.

При доказательстве теоремы об объёме призмы (см. с. 83) говорилось о том, что если переместить многогранник $ABCDEF$ вдоль прямой AA_1 так, чтобы точки A, B и C совместились с точками A_1, B_1 и C_1 (см. рис. 97, *а*), то многогранник $ABCDEF$ совместится с многогранником $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, и, следовательно, эти многогранники равны. Теперь мы можем сказать об этом более точно: указанные многогранники равны, так как один из них переходит в другой при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$.

Аналогично при рассмотрении цилиндрической поверхности (см. с. 120) говорилось о том, что линия L_1 пересечения плоскости β с цилиндрической поверхностью (см. рис. 138, *а*) представляет собой окружность с центром O_1 радиуса r. Теперь мы можем обосновать это утверждение

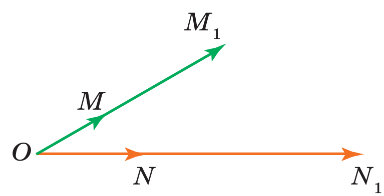
11

более просто: при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO_1}$ окружность L с центром O радиуса r переходит в линию L_1, и, следовательно, L_1 — окружность с центром O_1 радиуса r.

56 Преобразование подобия

Введём сначала понятие центрального подобия в пространстве. Оно вводится так же, как и в планиметрии.

Пусть даны точка O и число k, отличное от нуля. Центральным подобием (или гомотетией) с центром O и коэффициентом k называется отображение пространства на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_1, что $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ (рис. 211; на этом рисунке $k > 0$).



Центральное подобие с центром O и коэффициентом k:

$\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON_1} = k \cdot \overrightarrow{ON}$

Рис. 211

Центральное подобие обладает следующим свойством:

- **если при центральном подобии с коэффициентом k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.**

В самом деле,

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} = k\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Используя это свойство, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что

- **при центральном подобии с коэффициентом k отрезок длины a переходит в отрезок длины $|k| \cdot a$, луч переходит в луч, прямая — в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, плоскость — в плоскость, треугольник ABC — в треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC с коэффициентом $|k|$, а сфера с центром C радиуса R переходит в сферу с центром C_1 радиуса $|k| \cdot R$, где C_1 — точка, в которую переходит точка C.**

11

Центральное подобие является частным случаем преобразования подобия. Преобразованием подобия с коэффициентом $k > 0$ называется отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят в такие точки A_1 и B_1, что $A_1B_1 = k \cdot AB$.

Центральное подобие с коэффициентом k является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$. Если $k = 1$, то преобразование подобия является, очевидно, движением.

С помощью преобразования подобия можно ввести понятие подобия произвольных фигур в пространстве:

- **две фигуры называются подобными с коэффициентом k, если существует такое преобразование подобия с коэффициентом k, при котором одна из фигур переходит в другую.**

Примером подобных фигур в пространстве являются два прямоугольных параллелепипеда, измерения одного из которых пропорциональны измерениям другого. Подобными являются также любые два правильных тетраэдра и вообще любые два правильных многогранника с одинаковым числом граней.

Отметим, что если два тела подобны с коэффициентом k, то куб с ребром, равным 1, укладывается в одном из них столько же раз, сколько куб с ребром, равным k, укладывается в другом. Поскольку объём куба с ребром, равным k, равен k^3, то можно сделать вывод:

- **отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.**

57** Прямая и сфера Эйлера

Из курса планиметрии известно (см. пп. 64 и 65 учебника 8 класса), что с каждым треугольником связаны две замечательные фигуры — прямая Эйлера и окружность Эйлера.

Если треугольник неравносторонний, то центр O описанной около него окружности, точка G пересечения медиан и ортоцентр H треугольника лежат на одной прямой (она и называется прямой Эйлера), причём точка G лежит между точками O и H и делит отрезок OH в отношении

$$OG : GH = 1 : 2.$$

Центр окружности Эйлера также лежит на прямой Эйлера, он является серединой отрезка OH, а сама окружность проходит через середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с его вершинами. Радиус окружности Эйлера в два раза меньше радиуса описанной около треугольника окружности.

Оказывается, что аналогичная прямая и уже не окружность, а сфера связаны с любым тетраэдром, высоты которого (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Такой тетраэдр называется ортоцентрическим, а точка пересечения его высот называется ортоцентром этого тетраэдра. Ортоцентрический тетраэдр обладает следующим свойством: основание каждой его высоты является ортоцентром грани, к которой проведена эта высота (см. задачу 160 г). Докажем теорему о прямой и сфере Эйлера ортоцентрического тетраэдра.

ТЕОРЕМА

В ортоцентрическом неправильном тетраэдре:

1. центр O описанной около тетраэдра сферы, точка G пересечения медиан тетраэдра и ортоцентр H лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причём точка G является серединой отрезка OH;

2. точки пересечения медиан граней, основания высот тетраэдра и точки, лежащие на отрезках, соединяющих ортоцентр тетраэдра с его вершинами, и делящие каждый отрезок в отношении 2 : 1, считая от вершины, лежат на одной сфере (сфера Эйлера), центр E которой лежит на отрезке OH и делит его в отношении $OE : EH = 2 : 1$, а радиус сферы Эйлера в 3 раза меньше радиуса описанной около тетраэдра сферы.

Доказательство. Обратимся к рисунку 212, *а*, на котором отрезок AH_1 — высота тетраэдра $ABCD$, отрезок AG_1 — его медиана, точка H — ортоцентр тетраэдра, точка G — точка пересечения его медиан, причём $AG : GG_1 = 3 : 1$ (см. задачу 12 ж), точка O — центр описанной около тетраэдра сферы, он лежит на прямой, проходящей через центр O_1 окружности, описанной около треугольника BCD, и перпендикулярной к его плоскости (обоснуйте это). Будем рассматривать случай, когда треугольник BCD не равносторонний (в противном случае

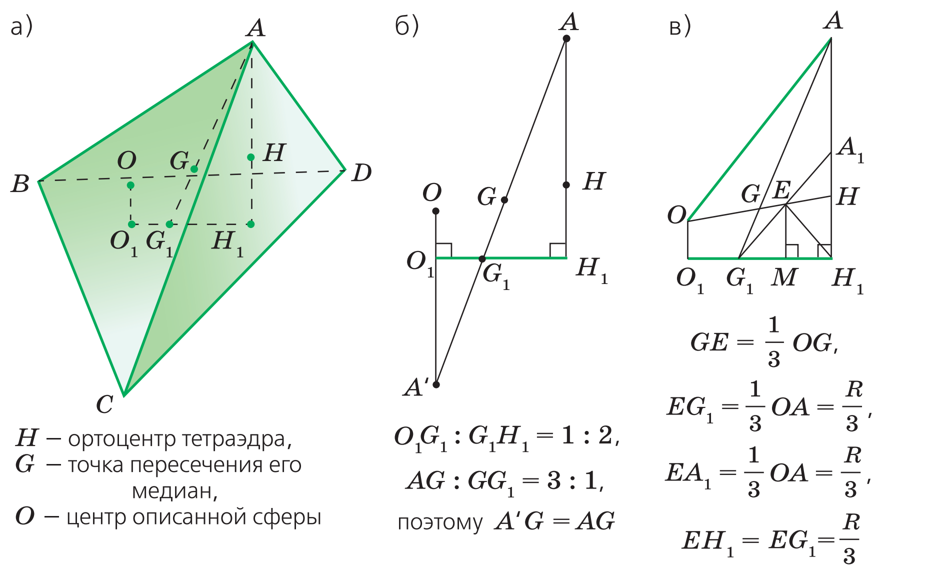


Рис. 212

точки H_1, G_1 и O_1 совпадают и тетраэдр $ABCD$ представляет собой правильную треугольную пирамиду; этот случай более простой, рассмотрите его самостоятельно). В нашем случае точки H_1, G_1 и O_1 — различные точки, они лежат на прямой Эйлера треугольника BCD, поэтому $O_1G_1 : G_1H_1 = 1 : 2$.

Так как прямые AH_1 и OO_1 перпендикулярны к плоскости BCD, то они параллельны. Рассмотрим плоскость, проходящую через эти прямые. В этой плоскости лежат отрезки O_1H_1 и AG_1 (рис. 212, *б*). Обозначим через A' точку пересечения прямых AG_1 и OO_1. Из подобия прямоугольных треугольников AG_1H_1 и $A'G_1O_1$ следует, что $\frac{A'G_1}{AG_1} = \frac{O_1G_1}{G_1H_1} = \frac{1}{2}$, откуда получаем $A'G_1 = \frac{1}{2}AG_1$, а поскольку $GG_1 = \frac{1}{3}AG$, то $AG_1 = \frac{4}{3}AG$, поэтому $A'G_1 = \frac{2}{3}AG$ и $A'G = A'G_1 + GG_1 = AG$. Таким образом, точка G — середина отрезка AA'.

Рассмотрим теперь центральную симметрию с центром G. При этой центральной симметрии точка A переходит в точку A', а прямая AH_1, проходящая через точку A, переходит в параллельную прямую, проходящую через точку A', т. е. в прямую $A'O_1$. Точно так же прямая, содержащая высоту BH_2 тетраэдра $ABCD$, переходит при данной симметрии в прямую, проходящую через центр O_2 окружности, описанной около треугольника ACD, и перпендикулярную к его плоскости. Эта прямая (обозначим её $B'O_2$), как и прямая $A'O_1$, проходит через точку O. Поэтому точка пересечения прямых AH_1 и BH_2, т. е. точка H, при центральной симметрии с центром G переходит в точку пересечения прямых $A'O_1$ и $B'O_2$, т. е. в точку O. Таким образом, точки O и H симметричны относительно точки G, т. е. точка G — середина отрезка OH. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим центральное подобие с центром G и коэффициентом $k = -\frac{1}{3}$. При этом центральном подобии точка O переходит в точку E, лежащую между точками G и H, причём $GE = \frac{1}{3}OG$, и, следовательно, $OE : EH = 2 : 1$ (рис. 212, *в*), а описанная около тетраэдра сфера с центром O (обозначим её радиус буквой R) переходит в сферу с центром E радиуса $\frac{R}{3}$. Назовём её сферой Эйлера и докажем, что на этой сфере лежат точки G_1, H_1 и такая точка A_1 отрезка AH, что $AA_1 : A_1H = 2 : 1$.

Так как при данном центральном подобии точка A, лежащая на описанной около тетраэдра сфере, переходит в точку G_1 (поскольку $GG_1 = \frac{1}{3}GA$), то точка G_1 лежит на сфере Эйлера, т. е. $EG_1 = \frac{R}{3}$.

11

Проведём перпендикуляр EM к прямой O_1H_1. Так как $OE : EH = 2 : 1$, то $O_1M : MH_1 = 2 : 1$, т. е. $O_1M = \frac{2}{3}O_1H_1$ и $MH_1 = \frac{1}{3}O_1H_1$, а поскольку $O_1G_1 = \frac{1}{3}O_1H_1$, то $G_1M = \frac{1}{3}O_1H_1 = MH_1$. Поэтому прямоугольные треугольники EMG_1 и EMH_1 равны по двум катетам, и, значит, $EH_1 = EG_1 = \frac{R}{3}$. Отсюда следует, что точка H_1 лежит на сфере Эйлера.

Заметим теперь, что при рассматриваемом центральном подобии прямая OA переходит в прямую EG_1 (так как точки O и A переходят соответственно в точки E и G_1), поэтому $EG_1 \parallel OA$. Обозначим через A_1 точку пересечения прямых EG_1 и AH_1 (см. рис. 212, *в*). Треугольники HEA_1 и HOA подобны (поскольку $EA_1 \parallel OA$), а так как $EH = \frac{1}{3}OH$, то $EA_1 = \frac{1}{3}OA = \frac{1}{3}R$ и $HA_1 = \frac{1}{3}HA$, т. е. $AA_1 : A_1H = 2 : 1$. Таким образом, точка A_1, делящая отрезок AH в отношении 2 : 1, считая от вершины A, лежит на сфере Эйлера.

Мы доказали, что точки G_1, H_1 и A_1, связанные с гранью BCD тетраэдра, лежат на сфере Эйлера. Таким же образом можно доказать, что аналогичные три точки, связанные с каждой другой гранью, также лежат на этой сфере.

Замечание. Если тетраэдр правильный, то сфера Эйлера совпадает со вписанной в тетраэдр сферой.

Вопросы и задачи

163. а) Докажите, что при движении отрезок переходит в равный ему отрезок, луч — в луч, прямая — в прямую.

б) Докажите, что при движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые, плоскость переходит в плоскость.

в) Докажите, что при осевой симметрии прямая, параллельная оси симметрии, переходит в прямую, также параллельную оси симметрии; прямая, угол между которой и осью равен φ, переходит в прямую, угол между которой и осью также равен φ.

г)* Докажите, что прямой параллелепипед имеет ось симметрии.

11

164. а) Докажите, что при движении треугольник переходит в равный ему треугольник, угол — в равный ему угол, сфера — в сферу того же радиуса.

б) Докажите, что при движении параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости, перпендикулярные плоскости — в перпендикулярные плоскости.

в) Докажите, что если прямая l является осью симметрии фигуры F, то при осевой симметрии с осью l фигура F переходит в себя (т. е. каждая точка M

фигуры F переходит в некоторую точку M_1 этой фигуры и в каждую точку M_1 фигуры F переходит некоторая точка M этой фигуры).
г)* Докажите, что если параллелепипед имеет ось симметрии, то он прямой.

165. а) Докажите, что при центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, переходит в параллельную ей прямую; прямая, проходящая через центр симметрии, переходит в себя.
б) Докажите, что при зеркальной симметрии прямая, параллельная плоскости симметрии, переходит в прямую, также параллельную плоскости симметрии; прямая, перпендикулярная к плоскости симметрии, переходит в себя.
в) Докажите, что если точка O является центром симметрии фигуры F, то при центральной симметрии с центром O фигура F переходит в себя.
г) Найдите координаты точки, в которую переходит точка $M(3; -5; 7)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\{-1; 2; 4\}$.
д) Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ грань AA_1D_1D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отображается на грань BB_1C_1C.
е) При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точки A и B переходят соответственно в точки C и D. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
ж)* Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны и параллельны сторонам треугольника ABC. Верно ли, что при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$?
з)* Фигура F' симметрична фигуре F относительно точки A, а фигура F_1 симметрична фигуре F' относительно точки B. Докажите, что фигура F_1 получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $2\overrightarrow{AB}$.

166. а) Докажите, что при центральной симметрии плоскость, не проходящая через центр симметрии, переходит в параллельную ей плоскость; плоскость, проходящая через центр симметрии, переходит в себя.
б) Докажите, что при зеркальной симметрии плоскость, параллельная плоскости симметрии, переходит в плоскость, также параллельную плоскости симметрии; плоскость, перпендикулярная к плоскости симметрии, переходит в себя.
в) Докажите, что если плоскость α является плоскостью симметрии фигуры F, то при зеркальной симметрии относительно плоскости α фигура F переходит в себя.
г) При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка $A(1; 2; 3)$ переходит в точку $B(3; 2; 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.
д) Четырёхугольник $KLMN$ является сечением параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середину K ребра AD и параллельной плоскости AA_1B. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ четырёхугольник AA_1B_1B отображается на четырёхугольник $KLMN$.

е) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AC}$ точка A переходит в точку C, а точка B — в точку D.

ж)* Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость, параллельную плоскости ABC. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$.

з)* Фигура F' симметрична фигуре F относительно прямой a, а фигура F_1 симметрична фигуре F' относительно прямой b, параллельной прямой a. Докажите, что фигура F_1 получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $2\vec{p}$, где $\vec{p}$ — вектор, начало и конец которого лежат на прямых a и b, перпендикулярный к этим прямым.

167. а) Докажите, что при центральном подобии с коэффициентом k отрезок длины a переходит в отрезок длины $|k| \cdot a$, луч переходит в луч, прямая — в прямую, плоскость — в плоскость.

б) Докажите, что при центральном подобии с центром O прямая, не проходящая через точку O, переходит в параллельную ей прямую; прямая, проходящая через точку O, переходит в себя.

в)* Докажите, что при центральном подобии с коэффициентом k сфера с центром C радиуса R переходит в сферу с центром C_1 радиуса $|k| \cdot R$, где C_1 — точка, в которую переходит точка C.

168. а) Докажите, что при центральном подобии с коэффициентом k треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC с коэффициентом $|k|$; угол переходит в равный ему угол; параллельные прямые переходят в параллельные прямые; параллельные плоскости — в параллельные плоскости.

б) Докажите, что при центральном подобии с центром O плоскость, не проходящая через точку O, переходит в параллельную ей плоскость; плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя.

в)* Докажите, что любое преобразование подобия можно представить как последовательное выполнение движения и центрального подобия.

Вопросы для повторения

1. Объясните, что такое ось координат, координата точки, лежащей на оси координат, и координата произвольной точки пространства по этой оси.

2. Объясните, как вводится прямоугольная система координат в пространстве. Как называются оси координат? Что такое координатные плоскости?

3. Объясните, как определяются координаты точки в заданной прямоугольной системе координат в пространстве. Как называются координаты точки?

4. В каком случае одна (две, три) из координат точки равна нулю?

5. Докажите, что если через точку M, не лежащую ни в одной из координатных плоскостей, проведены три плоскости, перпендикулярные к осям координат, то образуется прямоугольный параллелепипед, грани которого лежат в проведённых и координатных плоскостях.

6. Докажите, что каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.

7. Дайте определение вектора. Какой вектор называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$? Что такое нулевой вектор?

8. Что называется длиной (модулем) вектора? Чему равна длина нулевого вектора?

9. Какие векторы называются коллинеарными?

10. Дайте определение равных векторов.

11. Что называется координатами вектора в прямоугольной системе координат? Докажите, что координаты равных векторов соответственно равны, и обратно: если координаты векторов соответственно равны, то эти векторы равны.

12. Докажите, что длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

13. Выведите формулу, выражающую расстояние между двумя точками через их координаты.

14. Объясните, что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α». Выведите формулу, выражающую косинус угла между векторами через их координаты.

15. Объясните, как определяется сумма двух векторов. Докажите, что каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

16. Какой вектор называется разностью двух векторов? Докажите, что каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

17. Сформулируйте и докажите утверждение о свойствах суммы векторов.

18. Объясните, как определяется произведение вектора на число. Докажите, что каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

19. Сформулируйте и докажите утверждение о свойствах произведения вектора на число.

20. Какие векторы называются компланарными? Могут ли два (три) вектора быть некомпланарными?

21. Что означают слова «разложить вектор $\vec{p}$ по некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$»? Что такое коэффициенты разложения?

22. Сформулируйте и докажите теорему о разложении любого вектора по трём некомпланарным векторам.

23. Дайте определение скалярного произведения двух векторов. Выведите формулу, выражающую скалярное произведение двух векторов через их координаты.

24. Сформулируйте и докажите утверждение о свойствах скалярного произведения векторов.

25. Какое уравнение называется уравнением данной поверхности в заданной прямоугольной системе координат?

26. Выведите уравнение сферы данного радиуса с заданным центром.

27*. Какой вектор называется вектором нормали к данной плоскости? Выведите уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}\{a; b; c\}$.

28*. Докажите, что уравнение $ax + by + cz + d = 0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a, b и c отличен от нуля, является уравнением некоторой плоскости.

29*. Выведите формулу расстояния от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

30. Какой вектор называется направляющим вектором прямой? Объясните, как можно выразить угол между пересекающимися или скрещивающимися прямыми через угол между направляющими векторами этих прямых. Какие значения может принимать угол между двумя прямыми и в каком случае он равен 0°?

31. Выведите формулу, выражающую косинус угла между двумя прямыми через координаты направляющих векторов этих прямых.

11

32*. Выведите формулу, выражающую синус угла между прямой и плоскостью через координаты направляющего вектора прямой и вектора нормали к плоскости. Какие значения может принимать этот угол и в каком случае он равен 0°?

33*. Выведите формулу, выражающую косинус угла между двумя плоскостями через координаты векторов нормали к этим плоскостям. Какие значения может принимать этот угол и в каком случае он равен 0°?

34*. Докажите, что если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

35*. Докажите, что если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости (обобщённый признак перпендикулярности прямой и плоскости).

36. Дайте определения движения пространства и равных фигур в пространстве.

37. В какие фигуры при движении пространства переходят: отрезок? луч? прямая? параллельные прямые? угол? плоскость?

38. Объясните, какое отображение пространства на себя называется осевой симметрией, и докажите, что осевая симметрия является движением пространства.

39. Объясните, какое отображение пространства на себя называется центральной симметрией, и докажите, что центральная симметрия является движением пространства.

40. Объясните, какое отображение пространства на себя называется зеркальной симметрией, и докажите, что зеркальная симметрия является движением пространства.

41. Объясните, какое отображение пространства на себя называется параллельным переносом на данный вектор, и докажите, что параллельный перенос является движением пространства.

42. Объясните, какое отображение пространства на себя называется центральным подобием (или гомотетией) с данным центром и данным коэффициентом.

43. В какие фигуры при центральном подобии с коэффициентом k переходят: отрезок длины a? луч? прямая? параллельные прямые? плоскость? треугольник? сфера радиуса R с центром в данной точке?

44. Какое отображение пространства на себя называется преобразованием подобия с коэффициентом k?

45. Является ли центральное подобие с коэффициентом k преобразованием подобия, если $k > 0$? $k < 0$?

46. Дайте определение подобных фигур в пространстве. Приведите примеры подобных пространственных фигур.

47.** Сформулируйте и докажите теорему о прямой и сфере Эйлера.

11

Дополнительные задачи

§8

169. Напишите уравнение цилиндрической поверхности радиуса R, ось которой проходит через точку $M_0(x_0; y_0; 0)$ параллельно оси Oz.

170. Напишите уравнение конической поверхности с вершиной $M_0(x_0; y_0; 0)$, ось которой проходит параллельно оси Oz, а угол между осью и образующей равен φ.

171. Найдите множество всех точек $M(x; y; z)$, для которых

$$\sqrt{(x+8)^2+(y-6)^2+(z+3)^2}-\sqrt{(x-6)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=15.$$

§ 9

172. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}=2\overrightarrow{AA_1}$.

173. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $2MN \leqslant AD+BC$, причём знак равенства имеет место только в том случае, когда $AD \parallel BC$.

174. а) Точка M расположена по отношению к тетраэдру $ABCD$ так, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Докажите, что медианы этого тетраэдра проходят через точку M. б) Докажите, что точка пересечения медиан тетраэдра является серединой каждой из его бимедиан.

175. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Докажите, что величина $MA^2+MC^2-MB^2-MD^2$ не зависит от выбора точки M тогда и только тогда, когда точка D взята так, что данные точки и точка D являются вершинами параллелограмма.

176. При каких значениях $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ выражение $3\cos\alpha\cos\beta+4\sin\alpha\cos\beta+$ $+12\sin\beta$ принимает наибольшее значение?

177. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Докажите, что: 1) если для точки D существуют такие числа x, y и z, что $x+y+z=1$ и

$$\overrightarrow{MD}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}, \qquad (1)$$

то точка D лежит в плоскости ABC; 2) обратно: если точка D лежит в плоскости ABC, то существуют такие числа x, y и x, что $x+y+z=1$ и для любой точки M справедливо равенство (1).

178. а) Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм, луч SM пересекает основание пирамиды и образует равные углы со всеми её боковыми рёбрами. Докажите, что $SA+SC=SB+SD$. б) Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм, причём $SA+SC=SB+SD$. Докажите, что существует луч с началом S, образующий равные углы со всеми боковыми рёбрами.

11

§ 10

179. Даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$ тогда и только тогда, когда $AC \perp BD$.

180. Докажите, что высоты тетраэдра (или их продолжения) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда его бимедианы равны друг другу.

181. Отрезок DH — высота тетраэдра $ABCD$, все плоские углы которого с вершиной D — прямые. Докажите, что площадь треугольника ABD равна среднему геометрическому площадей треугольников ABC и ABH.

182. Докажите, что объём тетраэдра равен $\frac{1}{6}abd\sin\alpha$, где a и b — длины двух его противоположных рёбер, d и α — расстояние и угол между прямыми, содержащими эти рёбра.

183. Докажите, что рёбра PA_1 и A_nA_{n+1} правильной пирамиды $PA_1A_2...A_{2n-1}$ взаимно перпендикулярны.

§ 11

184. Точка M_1 симметрична точке $M(x; y; z)$ относительно плоскости Oxy, точка M_2 получается из точки M_1 параллельным переносом на вектор с координатами $\{1; 2; 3\}$, точка M_3 симметрична точке M_2 относительно оси Oy, а точка M_4 симметрична точке M_3 относительно точки O. Найдите координаты точки M_4.

185. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная n-угольная пирамида при $n > 3$?

186. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная n-угольная призма при $n > 4$?

187. а) При центральном подобии с центром A и коэффициентом k точка M переходит в точку C, а при центральном подобии с центром B и коэффициентом k точка M переходит в точку D. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $(1-k)\overrightarrow{AB}$ точка C переходит в точку D. б) При центральном подобии с центром A и коэффициентом k фигура F переходит в фигуру F_A, а при центральном подобии с центром B и коэффициентом k фигура F переходит в фигуру F_B. Докажите, что $F_A = F_B$.

Задачи повышенной трудности

Глава 1

188. На одной грани двугранного угла отмечена точка A, на другой — точка B. Докажите, что прямая AB образует равные углы с плоскостями граней тогда и только тогда, когда точки A и B равноудалены от ребра этого двугранного угла.

189. Из точки A проведены перпендикуляр AH и наклонные AM и AN к плоскости. Может ли угол MAN быть больше угла MHN?

190. Через центр каждой окружности, описанной около грани тетраэдра, проведена прямая, перпендикулярная к плоскости грани. Докажите, что эти четыре прямые имеют общую точку.

191. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ и $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos\varphi = \sin\alpha \sin\beta$.

192. Все плоские углы при одной вершине тетраэдра — прямые. Докажите, что бимедианы тетраэдра равны друг другу.

193. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые. Докажите, что если $DA = DB + DC$, то сумма плоских углов при вершине A равна 90°, и обратно: если сумма плоских углов при вершине A равна 90°, то $DA = DB + DC$.

194. Докажите, что для данного треугольника существует плоскость, параллельная проекция на которую этого треугольника является равносторонним треугольником.

195. Докажите, что для данной трапеции существует плоскость, параллельная проекция на которую этой трапеции является равнобедренной трапецией.

196. Пользуясь свойствами параллельного проектирования, приведите ещё одно доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника.

197. Дана проекция треугольника на плоскость. Прямые, содержащие стороны проекции треугольника, разделяют плоскость на семь частей (рис. 213). а) Внутри областей с какими номерами не может лежать проекция центра окружности, описанной около проектируемого треугольника? б) Дана точка M, которая является проекцией центра окружности, описанной около проектируемого треугольника; постройте проекцию ортоцентра этого треугольника.

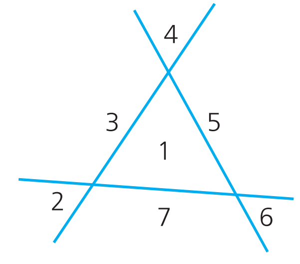


Рис. 213

198. Докажите, что сумма квадратов двух противоположных рёбер тетраэдра равна сумме квадратов шести отрезков, соединяющих середины остальных рёбер.

199. Разрежьте куб на шесть равных тетраэдров.

200. Докажите, что в куб с ребром 1 можно поместить окружность радиуса $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

201. Докажите, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие так, что через него можно протащить куб бо́льших размеров.

202. На рисунке 214 изображён тетраэдр $ABCD$, точка P лежит внутри грани ABC, точка Q — внутри грани ABD. Постройте на рисунке точку пересечения прямой PQ и плоскости ACD.

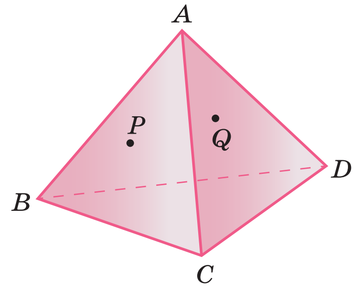


Рис. 214

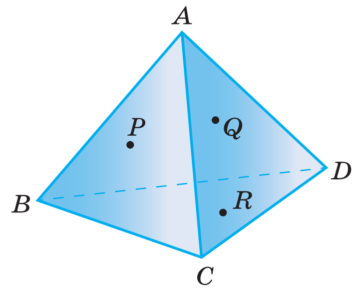


Рис. 215

203. На рисунке 215 изображён тетраэдр $ABCD$, точка P лежит внутри грани ABC, точка Q — внутри грани ABD, точка R — внутри грани ACD. Постройте на рисунке сечение тетраэдра плоскостью PQR.

204. Через каждое ребро равногранного тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Докажите, что при пересечении этих плоскостей образуется прямоугольный параллелепипед.

205. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда: а) его бимедианы попарно перпендикулярны; б) его бимедианы перпендикулярны к рёбрам, на которых лежат концы бимедиан.

206. Какую наибольшую площадь может иметь ортогональная проекция куба с ребром 1?

Глава 2

207. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится этими точками на три равных отрезка.

208. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые, $AD=a$, $BD=b$, $CD=c$, высота тетраэдра $DH=h$. Докажите, что $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

209. Докажите, что секущая плоскость, проходящая через ребро тетраэдра и образующая равные углы с плоскостями граней, содержащих это ребро, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям указанных граней.

210. Отрезок AA_1 — биссектриса тетраэдра $ABCD$. Докажите, что площади треугольников A_1BC, A_1CD и A_1DB пропорциональны площадям граней ABC, ACD и ADB.

211. Докажите, что точка O пересечения биссектрис тетраэдра $ABCD$ делит биссектрису AA_1 в следующем отношении:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ABD}}{S_{BCD}}.$$

212. Плоскости ABC_1 и A_1B_1C разделяют призму $ABCA_1B_1C_1$ с объёмом V на четыре части. Найдите объёмы этих частей.

213. Все вершины выпуклого многогранника лежат в параллельных плоскостях α и β, расстояние между которыми равно d. Сумма площадей граней, лежащих в этих плоскостях, равна S, объём многогранника равен V. Секущая плоскость параллельна плоскостям α и β и равноудалена от них. Найдите площадь сечения.

214. Через точку M основания правильной пирамиды проведена прямая, перпендикулярная к плоскости основания. Докажите, что сумма расстояний от точки M до точек пересечения этой прямой с плоскостями боковых граней пирамиды не зависит от выбора точки M.

215. Двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды равен α, угол между её боковым ребром и плоскостью основания равен β. Докажите, что $\sin^2\alpha - \sin^2\beta < \operatorname{tg}^2\frac{180°}{n}$.

216. В пирамиде $PA_1...A_n$ равны рёбра основания и равны углы PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1. Докажите, что эта пирамида правильная.

217. Первая из двух секущих плоскостей правильной четырёхугольной усечённой пирамиды проходит через стороны её оснований, а вторая — через диагонали оснований, угол между плоскостями равен θ. Найдите площадь второго сечения, если площадь первого сечения равна S.

218. Плоские углы трёхгранного угла $OABC$ равны α, β и γ, а противолежащие им рёбра образуют с плоскостями граней OBC, OCA и OAB углы φ, ψ и χ. Докажите, что $\sin\alpha\sin\varphi = \sin\beta\sin\psi = \sin\gamma\sin\chi$.

219. Докажите, что у любого выпуклого четырёхгранного угла есть сечение, которое является параллелограммом, и плоскости всех таких сечений параллельны.

220. а) Плоские углы выпуклого четырёхгранного угла равны друг другу. Равны ли друг другу двугранные углы при его рёбрах? Ответ обоснуйте. б) Двугранные углы при рёбрах выпуклого четырёхгранного угла равны друг другу. Равны ли друг другу его плоские углы?

221. Точка O_1 лежит во внутренней области трёхгранного угла $OABC$ (т. е. точка O_1 и каждое ребро трёхгранного угла лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через два других ребра). Из точки O_1 проведены перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 к плоскостям OBC, OAC и OAB. Трёхгранный угол $O_1A_1B_1C_1$ называется полярным по отношению к трёхгранному углу $OABC$. а) Выразите плоские углы трёхгранного угла $O_1A_1B_1C_1$ через двугранные углы трёхгранного угла $OABC$ (величины этих двугранных углов обозначим $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$). б) Пусть точка O лежит во внутренней области трёхгранного угла $O_1A_1B_1C_1$. Докажите, что трёхгранный угол $OABC$ является полярным по отношению к трёхгранному углу $O_1A_1B_1C_1$.

222. Докажите, что на рёбрах куба можно отметить 6 точек, которые являются вершинами правильного октаэдра.

223. Докажите, что ортогональной проекцией правильного икосаэдра на плоскость его грани является правильный шестиугольник.

224. Докажите, что ортогональной проекцией правильного додекаэдра на плоскость его грани является правильный десятиугольник.

225. Докажите, что в любом многограннике: а) число граней с нечётным числом сторон чётно; б) число вершин, к которым сходится нечётное число рёбер, чётно.

226. Многогранник имеет Г граней, Р рёбер и В вершин. Докажите, что: а) $2\text{Р} \geqslant 3\text{Г}$ и $2\text{Р} \geqslant 3\text{В}$; б) если многогранник выпуклый, то $\text{Р} < 3\text{Г}$ и $\text{Р} < 3\text{В}$.

227. Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть: а) либо треугольная грань, либо вершина, к которой сходятся три ребра, либо и треугольная грань, и вершина, к которой сходятся три ребра; б) хотя бы одна грань с числом сторон менее шести.

228. Докажите, что если все грани многогранника, отличного от куба, — квадраты, то этот многогранник невыпуклый.

229. Докажите, что сумма углов всех граней выпуклого многогранника с n вершинами вдвое больше суммы углов выпуклого n-угольника.

Глава 3

230. Даны прямая a и точка A, не лежащая на прямой a. Найдите множество всех таких точек M, каждая из которых является концом общего перпендикуляра к прямым a и AM.

231. В основание конуса с вершиной P вписан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что сумма двугранных углов $BPAD$ и $BPCD$ равна сумме двугранных углов $ABPC$ и $ADPC$.

232. Около основания конуса с вершиной P описан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $\angle APB + \angle CPD = \angle APD + \angle BPC$.

233. Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной P, двугранные углы $CPAB$, $APBC$ и $BPCA$ равны соответственно α, β и γ. Найдите угол между плоскостью ABP и плоскостью, касающейся боковой поверхности конуса по образующей PA.

234. Отрезок AB, равный $2R$, является диаметром большего основания усечённого конуса, отрезок BC — его образующая. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен 60°. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого усечённого конуса от точки A к точке C.

235. Плоская ломаная $A_1A_2...A_n$ длины l вращается вокруг прямой A_1A_n. Докажите, что площадь образующейся поверхности не превосходит $\frac{1}{2}\pi l^2$.

236. Докажите, что поверхность является сферой, если: а) любое её сечение является окружностью; б) любые три её точки не лежат на одной прямой, а проходящая через них окружность целиком принадлежит поверхности.

237. Докажите, что через две окружности с общей хордой, не лежащие в одной плоскости, проходит сфера, и притом только одна.

238. На поверхности куба найдите точки, из которых его диагональ видна под наименьшим углом.

239. В кубе с ребром a расположен правильный тетраэдр с ребром b. Найдите наибольшее значение величины b.

240. Докажите, что из всех многогранников с шестью вершинами, вписанных в данную сферу, наибольший объём имеет правильный октаэдр.

241. Три хорды трёх сфер пересекаются в точке, принадлежащей общей хорде этих сфер. Докажите, что концы этих трёх хорд лежат на одной сфере.

242. Сфера S_{D}, проходящая через вершины A, B и C тетраэдра $ABCD$, пересекает рёбра DA, DB и DC в точках L, M и N, а сфера S_{A}, проходящая через вершины B, C и D, пересекает рёбра AB, AC и AD в точках P, Q и R. Докажите, что: а) плоскость LMN перпендикулярна к радиусу OD сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$; б) треугольники LMN и PQR подобны; в) если $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$, то треугольники LMN и PQR равносторонние.

243. Докажите, что площадь поверхности призмы, описанной около шара, в 6 раз больше площади её основания.

244. Центр вписанной в тетраэдр $ABCD$ сферы расположен в плоскости ABM, где M — точка на ребре CD. Точка K лежит на грани ABC и $KM \perp ABM$. Докажите, что площадь треугольника ABK зависит только от площадей граней ABC и ABD.

245. Докажите, что существует не менее пяти и не более восьми сфер, каждая из которых касается плоскостей всех граней данного тетраэдра. При каком условии их восемь?

246. Сфера касается всех сторон пространственного[1] четырёхугольника. Докажите, что: а) точки касания лежат в одной плоскости; б) существует бесконечно много сфер, касающихся всех сторон этого четырёхугольника.

247. Докажите, что существует не менее восьми сфер, касающихся прямых AB, BC, CD и DA, не лежащих в одной плоскости.

248. Через вершину A треугольника ABC в его плоскости проведена прямая a, не пересекающая отрезка BC. Докажите, что: а) объём тела, получающегося при вращении треугольника ABC вокруг прямой a, равен произведению площади поверхности, образуемой вращением стороны BC, на одну треть высоты AH треугольника ABC; б) исходя из доказанного в задаче а), докажите, что площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

249. Докажите, что объём тела, полученного при вращении сегмента круга вокруг не пересекающего его диаметра, равен $\frac{\pi a^2 h}{6}$, где a — длина хорды этого сегмента, h — длина проекции этой хорды на диаметр.

250. Объём тела, ограниченного конической поверхностью и двумя вписанными в неё сферами, касающимися одна другой (рис. 216), равен V. Через общие окружности конической поверхности и указанных сфер проведена ещё одна сфера. Найдите объём тела, ограниченного этой сферой и конической поверхностью.

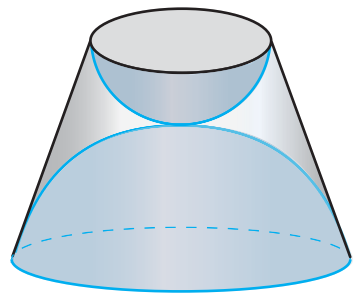


Рис. 216

Глава 4

251. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$.

252. Даны две точки A и B. Докажите, что множество всех точек X пространства, для которых величина $AX^2 - BX^2$ постоянна, представляет собой плоскость, перпендикулярную к прямой AB.

253. Даны три точки A, B и C. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

254. Даны две точки A и B и положительное число k. Докажите, что: а) множество всех точек M, для которых $\frac{MA}{MB} = k$, представляет собой либо плоскость, либо сферу (её называют сферой Аполлония); б) для любой сферы, проходящей через точки A и B, квадрат расстояния от её центра до центра сферы Аполлония равен сумме квадратов её радиуса и радиуса сферы Аполлония.

[1] То есть не все вершины четырёхугольника лежат в одной плоскости.

255. В пространстве даны точки A, B, C и D, не лежащие на одной прямой, причём $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$. Докажите, что эти точки являются вершинами параллелограмма.

256. Докажите, что касательная плоскость к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точке с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ задаётся уравнением $x_0x+y_0y+z_0z=R^2$.

257. Найдите множество середин всех отрезков данной длины, концы которых лежат на двух скрещивающихся взаимно перпендикулярных прямых.

258. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Докажите, что расстояние от любой точки пространства до одной из прямых AA_1, B_1C_1, CD не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

259. Точки M и N — середины сторон BC и DA пространственного четырёхугольника $ABCD$, стороны AB и CD которого равны. Докажите, что угол между прямыми MN и AB равен углу между прямыми MN и CD.

260. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$; б) если $AB\perp CD$ и $AC\perp DB$, то $AD\perp BC$.

261. Каково наибольшее число лучей в пространстве с общим началом, образующих попарно тупые углы?

262. Докажите, что в пространстве нельзя выбрать более шести векторов, все углы между которыми не острые.

263. Две пересекающиеся прямые перпендикулярны. Докажите, что последовательное выполнение двух симметрий относительно этих прямых является симметрией относительно прямой, перпендикулярной к этим прямым.

264. Через каждое ребро тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная отрезку, соединяющему данную точку N с серединой противоположного ребра тетраэдра. Докажите, что все шесть таких плоскостей имеют общую точку.

265. Точка O лежит на оси цилиндра и равноудалена от его оснований. Отрезок AB — диаметр одного из оснований, точка C лежит на окружности другого основания и не лежит в плоскости AOB. Докажите, что сумма двугранных углов трёхгранного угла $OABC$ равна 360°.

266. Докажите, что тетраэдр не имеет центра симметрии.

267. а) Докажите, что если тетраэдр имеет ось симметрии, то существует прямая, проходящая через середины двух его противоположных рёбер и перпендикулярная к ним. б) Докажите, что если тетраэдр имеет две оси симметрии, то два его противоположных ребра равны, а прямая, проходящая через середины этих рёбер, перпендикулярна к ним. в) Докажите, что если тетраэдр имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось симметрии.

268. а) Докажите, что если тетраэдр имеет плоскость симметрии, то две его грани — равнобедренные треугольники. б) Докажите, что если тетраэдр имеет две плоскости симметрии, проходящие через одну и ту же вершину, то он имеет и третью плоскость симметрии. в) Докажите, что если тетраэдр имеет четыре плоскости симметрии, то он имеет ещё две плоскости симметрии.

269. Все плоские углы тетраэдра $ABCD$ с вершиной D прямые и изготовлены из зеркал. Луч света входит в тетраэдр через прозрачную грань ABC. Докажите, что после трёх отражений от зеркальных граней направление луча изменится на противоположное по отношению к начальному.

270. Докажите, что если n-угольная пирамида при $n > 3$ имеет ось симметрии, то её основание имеет центр симметрии.

271. Докажите, что если n-угольная пирамида при $n > 3$ имеет плоскость симметрии, то её основание имеет ось симметрии.

272. Докажите, что: а) если призма имеет центр симметрии, то её основание имеет центр симметрии; б) если наклонная призма имеет ось симметрии, то её основание имеет ось симметрии.

273. Докажите, что радиус сферы, вписанной в тетраэдр, не менее чем в 3 раза меньше радиуса сферы, описанной около него.

274. Даны 4 попарно параллельные плоскости. Докажите, что на каждой из них можно отметить по одной точке так, что эти точки будут вершинами правильного тетраэдра.

Задачи для подготовки к ЕГЭ

3

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 217).

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 218).

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 219).

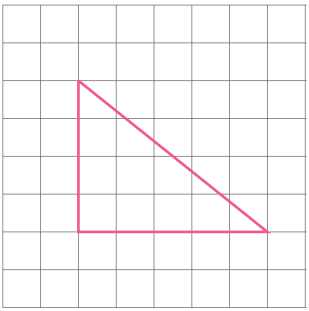


Рис. 217

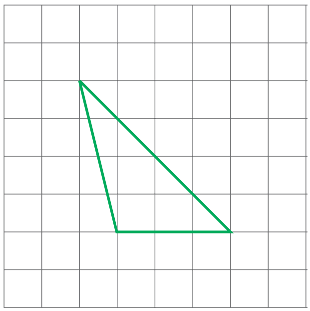


Рис. 218

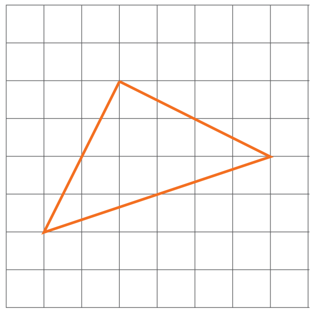


Рис. 219

4. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 220).

5. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 221).

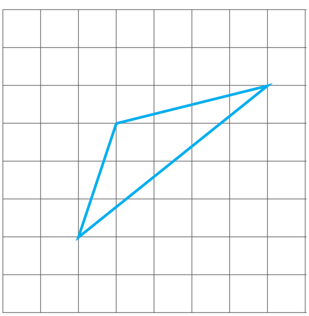


Рис. 220

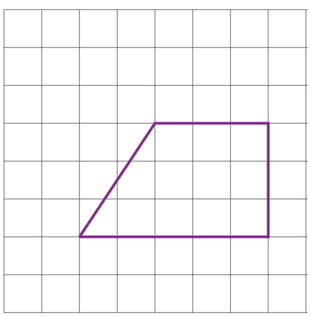


Рис. 221

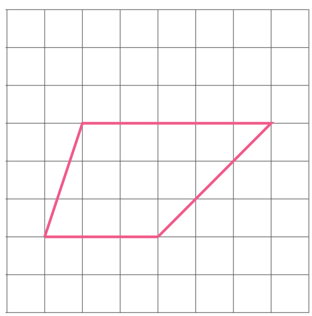


Рис. 222

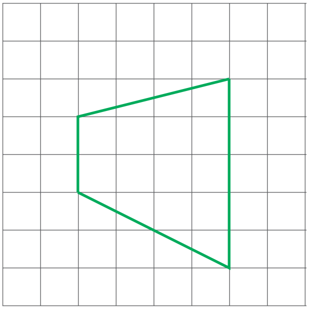


Рис. 223

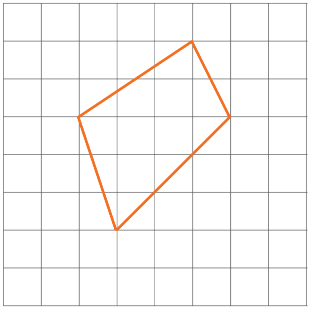


Рис. 224

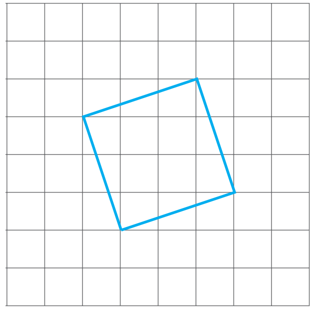


Рис. 225

6. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 222).

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 223).

8. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 224).

9. Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 225).

10. Найдите площадь S части круга, закрашенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 226). В ответе укажите число, равное $\frac{S}{\pi}$.

11. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.

12. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 150°.

13. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 6 и 8, а угол между ними равен 30°.

14. Площадь прямоугольного треугольника равна 12, а один из его катетов равен 6. Найдите другой катет.

15. Основания трапеции равны 1 и 3, а высота равна 1. Найдите площадь трапеции.

16. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь меньшего многоугольника равна 36. Найдите площадь большего многоугольника.

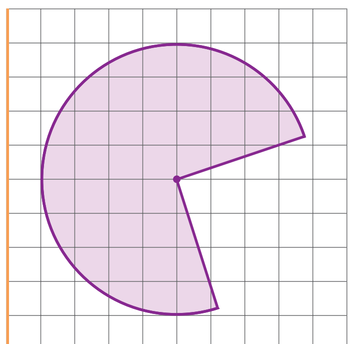


Рис. 226

17. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $\sqrt{\pi}$.

18. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.

19. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 16 и одна сторона на 2 меньше другой.

20. Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.

21. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, проведённая к первой стороне, равна 10. Найдите высоту, проведённую ко второй стороне параллелограмма.

22. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

23. Основания прямоугольной трапеции равны 2 и 8. Её площадь равна 30. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

24. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A\,(5;\,9)$ относительно оси Oy.

25. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A\,(3;\,7)$ и $B\,(-1;\,3)$.

26. Найдите длину вектора $\vec{a}\,\{6;\,8\}$.

27. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(3;\,0)$ и $(0;\,3)$.

28. Точки $O\,(0;\,0)$, $A\,(8;\,6)$, $B\,(12;\,-2)$ и C являются вершинами параллелограмма $OBAC$. Найдите ординату точки C.

29. Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x+2y=6$, с осью Ox.

30. Найдите ординату точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x+2y=6$ и $y=-x$.

31. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P\,(7;\,5)$, чтобы она касалась оси абсцисс?

32. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(6;\,0)$, $(0;\,10)$ и $(6;\,10)$.

33. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;\,1)$, $(4;\,3)$ и $(4;\,5)$.

34. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$.

35. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите $|\overrightarrow{AB}|$.

36. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

37. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.

38. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

6

1. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\sin B$, если $\sin A = \frac{7}{25}$.

2. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите AC, если $BC=6$ и $\operatorname{tg} A=0{,}5$.

3. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите высоту CH, если $AB=13$ и $\operatorname{tg} A=0{,}2$.

4. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 9,6. Найдите AC, если $\sin A = \frac{7}{25}$.

5. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 40. Найдите $\sin A$, если $AC=25$.

6. В треугольнике ABC угол C прямой, высота CH равна 7. Найдите $\cos A$, если $BH=24$.

7. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите косинус внешнего угла при вершине B, если $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$.

8. В параллелограмме $ABCD$ $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите $\sin B$.

9. Основания равнобедренной трапеции равны 31 и 45, а боковая сторона равна 25. Найдите синус острого угла трапеции.

10. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12, а синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

11. Найдите синус угла AOB (рис. 227). В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{5}$.

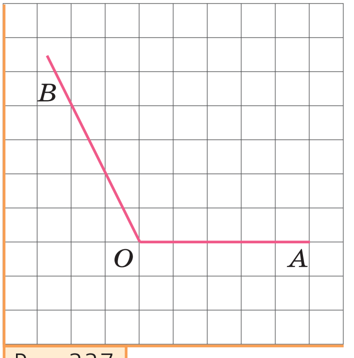


Рис. 227

12. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.

13. В треугольнике ABC отрезок AD — биссектриса, угол C равен 30°, угол BAD равен 18°. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.

14. Углы A и B треугольника ABC равны 58° и 72°, высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите величину угла A_1OB_1. Ответ дайте в градусах.

15. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.

16. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 20°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

17. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $2\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

18. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

19. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 18. Найдите её среднюю линию.

20. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.

21. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 54°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

22. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

23. Найдите диаметр окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.

24. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите угол BOC, если угол BAC равен 23°.

25. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

8

1. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 8$ и $AA_1 = 5$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 4$. Найдите угол C_1BC. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S точка R — середина ребра BC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB = 1$, $SR = 2$.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Объём пирамиды равен 1. Найдите площадь треугольника ABC, если $MS = 1$.

5. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, высота пирамиды равна 4. Найдите длину бокового ребра.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 23. Найдите расстояние между точками D и F_1.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 49. Найдите угол E_1EA_1. Ответ дайте в градусах.

8. Высота конуса равна 4, а диаметр основания равен 6. Найдите образующую конуса.

9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а диаметр основания равен 1. Найдите высоту цилиндра.

10. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза?

11. Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объём.

12. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 60, а площадь одной из его граней равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное к этой грани.

13. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

14. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро призмы равно 5. Найдите объём призмы.

15. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

16. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$.

17. Найдите объём призмы, основанием которой является правильный шестиугольник со стороной, равной 2, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$ и наклонено к плоскости основания под углом в 30°.

18. Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, и каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.

19. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4, а её объём равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

20. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12, а объём пирамиды равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.

21. Найдите объём пирамиды, вершинами которой являются вершины A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$ и $AA_1 = 4$.

22. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания, а каждая из трёх других боковых граней наклонена к плоскости основания под углом в 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объём пирамиды.

23. Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите диаметр сферы.

24. Объём первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

25. Высота конуса равна 6, а образующая равна 10. Найдите отношение объёма конуса к числу π.

26. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите отношение объёма конуса к числу π.

27. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 2 раза?

28. Площадь полной поверхности данного правильного тетраэдра равна 80 см^2. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого в 4 раза меньше ребра данного тетраэдра.

29. Площадь боковой поверхности конуса равна 16 см^2. Радиус основания конуса уменьшили в 4 раза, а образующую увеличили в 2 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса.

14

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите косинус угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 8$ и $AA_1 = 5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно к прямой AK, где K — середина ребра C_1D_1.

5. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1B_1C_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и прямую BC, если $AB = 4$, $BB_1 = 12$.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.

9. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

10. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24, точка P — середина ребра BB_1. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

11. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью AA_1D_1 и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно к прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.

14. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.

15. Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана её основания равна 6. Найдите тангенс угла, который боковое ребро образует с плоскостью основания.

16. Основание пирамиды $DABC$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно к плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла $DACB$.

17. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC и AD, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

18. В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB=AC=DB=DC=10$, $BC=DA=12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

19. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

22. Диаметр основания цилиндра равен 20, а образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

16

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC=\alpha$. Найдите все медианы этого треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на стороне BC взята точка D так, что $BD:DC=1:4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

3. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к боковой стороне.

4. Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60°. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH=AB$. Найдите угол ACB.

6. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, точка O — центр вписанной в треугольник окружности. Известно, что $BC=24$, $MN=12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

7. Точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

8. Углы A и C треугольника ABC равны 45° и 60°, отрезки AM, BN и CK — высоты треугольника. Найдите отношение $\dfrac{MN}{KN}$.

9. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\dfrac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}=\dfrac{1}{2}$. Найдите отношение $\dfrac{BC}{AB}$.

10. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{MO}{OA}$.

11. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

12. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол в 60° с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом в 60°, а их длины относятся как 1 : 3. Чему равна меньшая диагональ четырёхугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

14. Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Найдите AC, если $AB = 27$, $CD = 28$, $BC = 5$ и $\cos \angle BCD = -\frac{2}{7}$.

15. Окружность с центром O касается двух параллельных прямых. Касательная к окружности пересекает эти прямые в точках A и B. Найдите угол AOB.

16. Через точку M, лежащую вне окружности с центром O и радиусом R, проведены касательные MA и MB к этой окружности (A и B — точки касания). Прямые OA и MB пересекаются в точке C. Найдите OC, если известно, что отрезок OM делится окружностью пополам.

17. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

18. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга извне. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы двух других равны 6 и 4.

19. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности и гипотенузы делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

20. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$ и $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

21. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке A, а бóльшую — в точке C (A и C отличны от B). Найдите BC, если $AC = 3\sqrt{2}$.

22. Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r ($R > r$) касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если $AB = a$.

23. Точка O — центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM за точку M взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности извне.

24. Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно a, $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

25. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

26. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12, $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

27. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Найдите их общую хорду, если катеты равны 3 и 4.

28. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 13, 13 и 24 и расстояние между центрами этих окружностей.

29. Окружность S_1 проходит через центр окружности S_2 и пересекает её в точках A и B. Хорда AC окружности S_1 касается окружности S_2 в точке A и делит окружность S_1 на дуги, градусные меры которых относятся как 5 : 7. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность S_2 делится окружностью S_1.

30. На стороне BA угла ABC, равного 30°, отмечена такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

31. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3. Точка D — середина гипотенузы BC. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.

32. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга извне в точке C. Прямая касается этих окружностей в точках A и B, отличных от C. Найдите угол AO_2B, если $\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{1}{2}$.

33. Окружности радиусов 4 и 9 касаются друг друга извне, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся двух данных окружностей и данной прямой.

34. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D так, что $\angle BCD = \angle BAC$. Найдите CD, если $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

35. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки K, L и M так, что $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$ и $CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении точка пересечения отрезков KL и BM делит отрезок BM?

36. Сторона треугольника равна 36. Прямая, параллельная этой стороне, разделяет треугольник на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

37. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

38. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F. Площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

39. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2 : 3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.

40. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причём $AD = \frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 1$.

41. Найдите площадь трапеции с основаниями, равными 18 и 13, и боковыми сторонами, равными 3 и 4.

42. На продолжении за точку B диаметра AB окружности отложен отрезок BC, равный диаметру. Прямая, проходящая через точку C, касается окружности в точке M. Найдите площадь треугольника ACM, если радиус окружности равен R.

43. Медиана AM и биссектриса CD треугольника ABC с прямым углом B пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO = 9$ и $OD = 5$.

Задачи с практическим содержанием

Глава 1

1. Можно ли из прямолинейных реек изготовить звезду, изображённую на рисунке (рис. 228)?

2. Ученик изобразил тетраэдр, в котором проведено сечение (рис. 229). Правилен ли его чертёж?

3. Как с помощью линейки измерить диагональ кирпича, если есть несколько одинаковых кирпичей? (Требуется непосредственно измерить диагональ, а не вычислить её, измерив длину, ширину и высоту.)

4. Можно ли куб с ребром 10 см завернуть в квадратный платок со стороной 30 см?

5. По четырём дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, с постоянными скоростями идут 4 пешехода. Известно, что первый пешеход встретился со вторым, третьим и четвёртым, а второй — с третьим и четвёртым. Докажите, что третий пешеход встретился с четвёртым.

6. Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от паука вершин куба. Как должен двигаться паук?

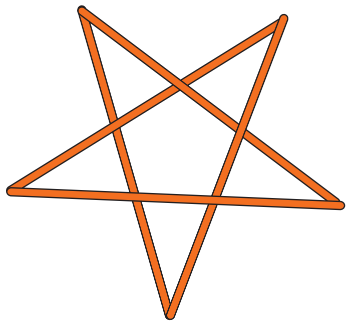


Рис. 228

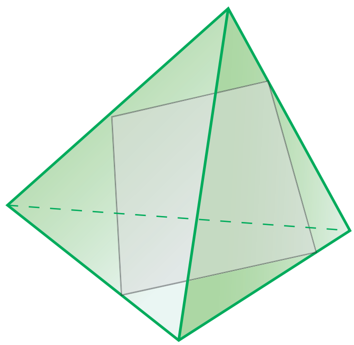


Рис. 229

Глава 2

1. Три свинцовых куба, рёбра которых равны 3 см, 4 см и 5 см, расплавили и изготовили из них один куб. Найдите его ребро.

2. Кирпич размером 25 см × 12 см × 6,5 см весит 3,51 кг. Найдите его плотность в граммах на кубический сантиметр.

3. Сечение железнодорожной насыпи, перпендикулярное к рельсам, имеет вид трапеции с нижним основанием 12 м, верхним основанием 6 м и высотой 2 м. Найдите объём 10-метрового участка насыпи.

4. Сечение реки, перпендикулярное к течению реки, представляет собой трапецию с основаниями 20 м и 16 м и высотой 2 м. Скорость течения воды в реке 2 м/с. Сколько кубических метров воды проходит через это сечение за 1 мин?

5. Почему (при одинаковой глубине) в узких местах русла реки её течение быстрее, чем в широких? А что будет, если ширина одинаковая, а глубина разная?
6. Сделайте рисунок пробки, которой можно заткнуть отверстия трёх видов: треугольное, квадратное и круглое.

Глава 3

1. Из одного цилиндрического сосуда диаметром 15 см жидкость перелита в другой цилиндрический сосуд диаметром 5 см. Во сколько раз уровень жидкости в узком сосуде выше, чем в широком?
2. Найдите диаметр медной проволоки, 100 м которой весят 700 г (плотность меди 8,9 г/см^3).
3. Алюминиевый провод диаметром 2 мм весит 424 г. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,7 г/см^3).
4. Сколько тонн нефти вмещает цилиндрический вагон-цистерна диаметром 3 м и длиной 12 м (плотность нефти равна 0,85 г/см^3)?
5. Свинцовая труба с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 20 мм. Найдите вес трубы, если её длина равна 1,5 м (плотность свинца 11,3 г/см^3).
6. Найдите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) круглой водосточной трубы диаметром 10 см, если скорость течения воды равна 2 м/с.
7. В бочку, имеющую цилиндрическую форму, налита вода. Как можно выяснить (не выливая из бочки воды и не производя вычислений), наполнена бочка больше или меньше чем наполовину?
8. Куча песка имеет форму конуса, у которого длина окружности основания равна 31,4 м, а образующая равна 5,4 м. Сколько трёхтонных машин потребуется для перевозки этого песка, если 1 м^3 песка весит 2 т?
9. Сколько весит сено, сложенное в стог в форме цилиндра с коническим верхом, если радиус и высота цилиндрической части стога равны соответственно 3 м и 2 м, а высота конической части равна 2 м (плотность сена 0,07 г/см^3)?
10. Ведро имеет форму усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких вёдер, если на 1 м^2 требуется 150 г краски? (Толщину стенок ведра не учитывать.)
11. Во сколько раз объём Земли больше объёма Луны? (Диаметр Земли считать равным 12 740 км, а диаметр Луны — 3474 км.)
12. Восемь свинцовых шаров радиуса 1 см расплавили и изготовили из них один шар. Найдите его радиус.
13. В цилиндрическую мензурку диаметром 2 см, наполненную водой до некоторого уровня, опускают 3 металлических шарика, диаметр каждого из которых равен 1 см. На сколько изменится уровень воды в мензурке?
14. Будет ли плавать в воде полый медный шар, диаметр которого равен 10 см, а толщина стенки: а) 2 мм; б) 1,5 мм (плотность меди 8,9 г/см^3, а плотность воды 1 г/см^3)?

15. Полый шар радиуса 9 см, толщина стенок которого равна 3 см, плавает в воде, причём из воды выступает половина шара. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар (плотность воды равна 1 г/см^3).

16. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

17. Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным 6370 км.)

18. Сколько кожи пойдёт на покрышку футбольного мяча радиусом 11 см? (На швы добавить 8% от площади поверхности мяча.)

19. Сколько килограммов краски нужно, чтобы покрасить купол, имеющий форму полушара с диаметром 4 м, если на 1 м^2 требуется 150 г краски?

20. Человек прошёл километр на север, затем километр на запад и километр на юг. Мог ли он при этом вернуться в исходное положение?

21. Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 1 м 20 см и высотой 80 см?

22. При каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной ёмкости будет наименьшим? Другими словами, найдите размеры цилиндра данного объёма V, площадь поверхности которого наименьшая.

Глава 4

1. Почему, когда мы смотрим в зеркало, правое и левое меняются местами, а верх и низ нет? А что произойдет, если мы встанем на зеркальный пол?

2. Основание ABC тетраэдра $OABC$ прозрачное, а все остальные грани зеркальные. Все плоские углы при вершине O прямые. Докажите, что луч света, вошедший в тетраэдр через основание ABC под произвольным углом к нему, отразившись от граней, выйдет в противоположном направлении по отношению к входящему лучу. (На этом свойстве основано устройство уголкового отражателя, используемого для точного измерения расстояний.)

3. Вырежите из прямоугольного листа бумаги фигуру, изображённую на рисунке 230. (Клеем пользоваться нельзя.)

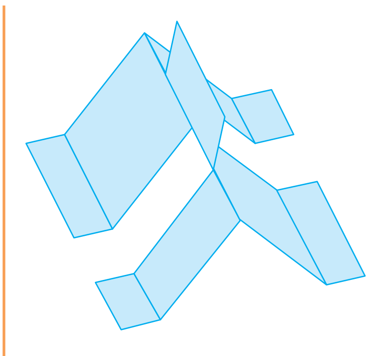


Рис. 230

Исследовательские задачи

1. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

а) противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны;

б) основанием одной из высот тетраэдра является ортоцентр грани (при этом таким же свойством обладают и три другие высоты тетраэдра);

в) три бимедианы тетраэдра равны друг другу;

г) суммы квадратов противоположных рёбер тетраэдра равны;

д) произведения косинусов противоположных двугранных углов тетраэдра равны.

2. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

а) противоположные рёбра тетраэдра равны;

б) сумма плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна $180°$;

в) бимедианы тетраэдра попарно перпендикулярны;

г) бимедианы тетраэдра являются общими перпендикулярами прямых, содержащих противоположные рёбра тетраэдра;

д) центры вписанной и описанной сфер тетраэдра совпадают;

е) центр описанной сферы и центр масс (т. е. точка пересечения медиан) тетраэдра совпадают;

ж) центр вписанной сферы и центр масс тетраэдра совпадают;

з) четыре медианы тетраэдра равны друг другу;

и) четыре высоты тетраэдра равны друг другу;

к) грани тетраэдра равновелики.

3. Тетраэдр называется каркасным, если существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра.
Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

а) суммы длин противоположных рёбер тетраэдра равны;

б) суммы двугранных углов при противоположных рёбрах тетраэдра равны;

в) окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются друг друга (это означает, что каждые две окружности, вписанные в грани тетраэдра с общим ребром, касаются этого ребра в одной и той же точке);

г) все четырёхугольники, получающиеся на развёртке тетраэдра, являются описанными;

д) четыре прямые, каждая из которых проходит через центр вписанной в грань тетраэдра окружности и перпендикулярна к этой грани, пересекаются в одной точке.

4. Найдите число попарно неравных друг другу равносторонних треугольников, все вершины которых принадлежат окружностям оснований цилиндра радиуса R с высотой h.

5. Исследуйте, сколько различных точек может быть среди тех 12 точек, через которые проходит сфера Эйлера.

Темы рефератов и докладов

1. Об аксиомах геометрии.
2. Ортоцентрический тетраэдр и его свойства.
3. Равногранный тетраэдр и его свойства.
4. Каркасный тетраэдр и его свойства.
5. Теоремы синусов и косинусов для трёхгранного угла.
6. Правильные многогранники и элементы их симметрии.
7. Полуправильные многогранники.
8. Метод проекций в задачах на сечения многогранников.
9. Сечения цилиндрической и конической поверхностей (эллипс, гипербола, парабола).
10. Прямая и сфера Эйлера.
11. Применение геометрических преобразований при решении задач.
12. Сферическая геометрия.

Система аксиом геометрии

Основные понятия. Фундамент для построения геометрии образуют основные понятия и аксиомы. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражены в аксиомах, формирующих наши первые представления об основных понятиях (в этом смысле можно сказать, что аксиомы служат своеобразным определением основных понятий). Опираясь на основные понятия и аксиомы, мы даём определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом строим всю геометрию. Совокупность основных понятий и аксиом геометрии называют системой аксиом геометрии.

В нашем курсе основных понятий пять: точка, прямая, плоскость, наложение и понятие лежать между для трёх точек одной прямой. При этом понятие «наложение» трактуется так же, как в планиметрии, — это отображение плоскости на себя, удовлетворяющее соответствующим аксиомам планиметрии, но только теперь эти аксиомы выполнены в любой плоскости (см. аксиому 1). И также понятие «лежать между» ничем не отличается от этого понятия в планиметрии.

Система аксиом геометрии. Основные свойства указанных понятий выражены в пяти аксиомах. Напомним первые четыре аксиомы (п. 1).

АКСИОМЫ

1. В пространстве существуют плоскости, и в каждой плоскости справедливы аксиомы планиметрии.
2. Через любые три точки проходит плоскость.
3. Каждая прямая лежит в некоторой плоскости.
4. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Из аксиом 2 и 3 следует, что множество всех точек (и также прямых) пространства состоит из точек (прямых), лежащих во всех плоскостях.

Опираясь на эти аксиомы, в п. 1 мы доказали три теоремы. Рассмотрим ещё одну теорему, которая доказывается также на основе перечисленных аксиом. Чтобы её сформулировать, нам понадобится новое понятие.

Если отрезок AB и плоскость α не имеют общих точек, то будем говорить, что точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α; если же отрезок AB пересекается с плоскостью α (т. е. имеет с ней общую точку, лежащую между A и B), то будем говорить, что точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α.

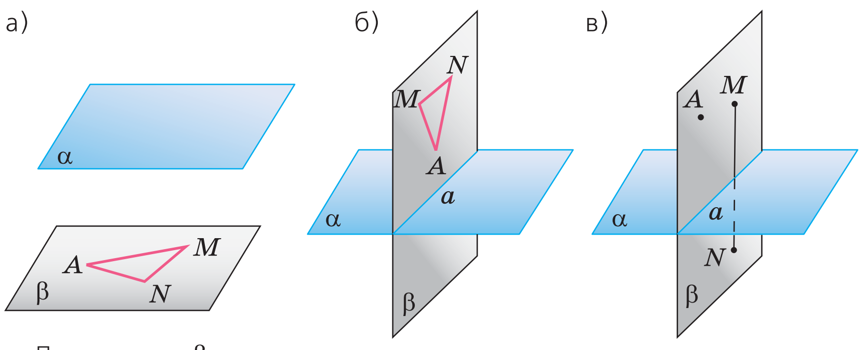
ТЕОРЕМА 1

Каждая плоскость α разделяет множество не лежащих на ней точек пространства на две части так, что любые две точки одной и той же части лежат по одну сторону от плоскости α, а любые две точки разных частей лежат по разные стороны от плоскости α.

Доказательство. Пусть A — произвольная точка, не лежащая в плоскости α. Определим множества Π_A и Π, элементами которых являются точки $M \notin \alpha$, так: если отрезок AM не пересекает плоскость α, то точка M принадлежит множеству Π_A, а если пересекает, то множеству Π. Саму точку A отнесём к множеству Π_A. Докажем, что эти множества и являются искомыми частями, т. е. докажем, что если точки M и N принадлежат одному и тому же множеству, то отрезок MN не пересекает плоскость α, а если разным частям, то пересекает.

Через точки A, M и N проходит плоскость (по аксиоме 2), обозначим её буквой β. Возможны два случая: 1 плоскости α и β не имеют общих точек; 2 плоскости α и β имеют общую точку.

1 Отрезки AM и AN, лежащие в плоскости β, не пересекают плоскость α (рис. 231, *а*), поэтому точки M и N принадлежат множеству Π_A. Отрезок MN также не пересекает плоскость α, т. е. в этом случае утверждение теоремы справедливо.



Плоскости α и β не имеют общих точек

Рис. 231

2 Плоскости α и β имеют общую прямую (по аксиоме 4), обозначим её буквой a. Эта прямая разделяет плоскость β на две полуплоскости (согласно аксиоме 1), причём точки одной из них (той, в которой лежит точка A) принадлежат множеству Π_A, а точки другой полуплоскости — множеству П. Поэтому если точки M и N лежат в одном и том же множестве (Π_A, рис. 231, *б*, или П), то они лежат в одной полуплоскости с границей a, т. е. отрезок MN не пересекает прямую a и, следовательно, не пересекает плоскость α.

Если же точки M и N принадлежат разным множествам, то они лежат в разных полуплоскостях с границей a. В этом случае отрезок MN пересекает прямую a, поэтому он пересекает и плоскость α (рис. 231, *в*).

Итак, мы доказали, что множество всех точек пространства, не лежащих на плоскости α, разделяется этой плоскостью на две части (Π_A и П), обладающие указанным в теореме свойством. Остаётся заметить, что это разделение не зависит от выбора точки A: если B — любая точка из множества Π_A, то множество Π_B совпадает с множеством Π_A.

Две части, на которые плоскость α разделяет множество не лежащих на ней точек, называются <u>полупространствами</u>, а сама плоскость α — <u>границей</u> каждого из них. Подчеркнём, что точки плоскости α не принадлежат ни одному из указанных подпространств.

Отметим, что с точки зрения наглядности утверждение теоремы 1 о разделении плоскостью пространства на два полупространства является очевидным.

Перейдём к пятой аксиоме. Она связана с измерением отрезков и понятием длины отрезка. Прежде чем её сформулировать, напомним, как вводилось понятие длины отрезка в нашем курсе планиметрии.

Какой-нибудь отрезок (обозначим его буквой e) выбираем в качестве единицы измерения, и с его помощью измерение произвольного отрезка AB производится следующим образом.

На луче AB откладываем последовательно отрезки AA_1, A_1A_2, ..., равные e, до тех пор пока очередная точка A_n либо совпадёт с точкой B (рис. 232, *а*), либо окажется вне отрезка AB (рис. 232, *б*).

В первом случае процесс измерения отрезка AB закончен, и его длина при выбранной единице измерения выражается числом n.

Во втором случае, когда отрезок $A_{n-1}B$ (назовём его остатком) меньше e, на луче $A_{n-1}B$ (если $n = 1$, то в качестве точки A_0 выступает точка A)

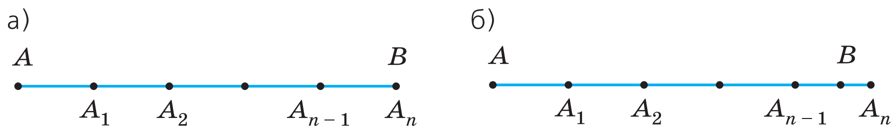


Рис. 232

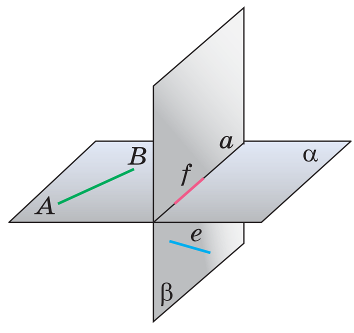
откладываем последовательно отрезки, равные $\frac{1}{10}e$, до тех пор пока получающийся остаток не станет меньше $\frac{1}{10}e$. После этого на этом остатке начинаем последовательно откладывать отрезки, равные $\frac{1}{100}e$, и т. д. В результате получается число (конечная или бесконечная десятичная дробь), которое показывает, сколько единиц измерения (отрезок e) и её частей ($\frac{1}{10}e$, $\frac{1}{100}e$ и т. д.) укладывается в данном отрезке AB. Это число и выражает длину отрезка AB при выбранной единице измерения.

Возможность проведения описанной процедуры измерения отрезков на плоскости основана на аксиомах планиметрии, в частности на следующей аксиоме из системы аксиом, принятой в учебнике [6]:

- **на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.**

В свою очередь, равенство двух отрезков (и вообще любых двух фигур) на плоскости определялось так: два отрезка (две фигуры) на плоскости называются равными, если их можно совместить наложением.

Поставим вопрос: каким образом можно распространить описанную процедуру измерения на отрезки в пространстве, для которых у нас нет пока понятия равенства? Поступим следующим образом. Выберем какой-то отрезок (обозначим его снова буквой e) в качестве единицы измерения и возьмём произвольный отрезок AB. Рассмотрим какие-нибудь пересекающиеся плоскости α и β, такие, что отрезок AB лежит в плоскости α, а отрезок e — в плоскости β. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости β отложим на прямой a от какой-нибудь её точки отрезок f, равный отрезку e (рис. 233). Это можно сделать в силу вышеупомянутой аксиомы планиметрии, которая выполняется в каждой плоскости согласно аксиоме 1. Отрезок f лежит также в плоскости α, и, значит, с помощью описанной процедуры можно измерить отрезок AB, лежащий в плоскости α, приняв отрезок f за единицу измерения в этой плоскости. В результате длина отрезка AB выразится каким-то определённым числом.



Отрезки f и e равны

Рис. 233

Но плоскости α и β можно выбрать бесконечным числом способов, в частности если отрезки AB и e лежат в одной плоскости, то эту плоскость можно взять и в качестве плоскости α, и в качестве плоскости β, а роль отрезка f будет играть отрезок e. В связи с этим возникает вопрос: не получится ли так, что при выбранном в качестве единицы измерения отрезке e длина отрезка AB будет зависеть от выбора плоскостей α и β, участвующих в описанной процедуре измерения отрезка AB? Наш обыденный опыт подсказывает, что указанной зависимости не будет. Соответствующее утверждение мы и принимаем в качестве пятой аксиомы.

АКСИОМА 5

Результат измерения данного отрезка не зависит от выбора для процедуры измерения плоскостей, в одной из которых лежит данный отрезок, а в другой — выбранная единица измерения.

Иными словами, какие бы плоскости α и β мы ни взяли, в результате измерения данного отрезка AB с помощью описанной процедуры получится одно и то же число. Это число назовём <u>длиной отрезка</u> AB <u>при выбранной единице измерения</u>.

Длина отрезка AB называется также <u>расстоянием между точками</u> A и B.

Понятие расстояния между точками лежит в основе определения равных фигур в пространстве. Предварительно вводится важный класс отображений пространства на себя, которые называются движениями пространства. Напомним, что движение пространства — это отображение пространства на себя, при котором сохраняются расстояния между точками. Это означает, что если при движении пространства точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $A_1B_1 = AB$. Опираясь на понятие движения пространства, мы даём общее определение равных фигур в пространстве.

Определение 1

Две фигуры называются равными, если существует движение пространства, при котором одна из этих фигур переходит в другую.

Заметим, что для плоских фигур, лежащих в одной плоскости, у нас теперь есть два определения равных фигур: общее определение (определение 1) и уже приведённое выше другое определение, связанное с аксиомой 1, в силу которой в любой плоскости выполняются аксиомы планиметрии, и, значит, для фигур, лежащих в одной плоскости, принимается следующее определение равенства.

Определение 2

Две фигуры, лежащие в одной плоскости, называются равными, если их можно совместить наложением (этой плоскости).

Чтобы доказать равносильность определений 1 и 2 для фигур, лежащих в одной плоскости, нам понадобится ряд утверждений, связанных со свойствами движений и наложений.

ТЕОРЕМА 2

При движении прямая переходит в прямую.

Доказательство. Пусть при данном движении пространства точки A и B прямой AB переходят в точки A_1 и B_1 (будем называть их образами точек A и B при данном движении). Докажем, что при этом движении прямая AB переходит в прямую A_1B_1 или, иначе говоря, образом прямой AB является прямая A_1B_1. Для этого нужно доказать, что: 1) любая точка C прямой AB переходит при данном движении в некоторую точку C_1 прямой A_1B_1, и обратно: 2) любая точка C_1 прямой A_1B_1 является образом некоторой точки C прямой AB.

Докажем первое утверждение. Пусть C — произвольная точка прямой AB, отличная от A и B, и пусть точка C_1 — образ точки C при данном движении. Согласно определению движения справедливы равенства

$$A_1B_1 = AB,\ A_1C_1 = AC,\ B_1C_1 = BC, \qquad (1)$$

а поскольку точка C лежит на прямой AB, то длина одного из отрезков AB, AC и BC равна сумме длин двух других отрезков. Пусть, например, $AB = AC + BC$. Тогда в силу равенств (1) выполняется равенство $A_1B_1 = A_1C_1 + B_1C_1$, из которого следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, т. е. точка C_1 лежит на прямой A_1B_1.

Таким же образом доказывается второе (обратное) утверждение.

ТЕОРЕМА 3

При движении плоскость переходит в плоскость.

Доказательство. Возьмём произвольную плоскость α и отметим на ней три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пусть при данном движении точки A, B и C переходят в точки A_1, B_1 и C_1. Докажем, что при этом движении плоскость α переходит в плоскость α_1, проходящую через точки A_1, B_1 и C_1.

Согласно теореме 2 при данном движении прямые AB и AC переходят в прямые A_1B_1 и A_1C_1, лежащие в плоскости α_1 (поскольку точки A_1, B_1 и C_1 лежат в этой плоскости).

Пусть M — произвольная точка плоскости α, отличная от точек A, B и C. Проведём через точку M прямую в плоскости α, пересекающую прямые AB и AC в некоторых точках D и E (рис. 234). При данном движении образами точек D и E будут какие-то точки D_1 и E_1, лежащие (по теореме 2) на прямых A_1B_1 и A_1C_1, образом прямой DE будет прямая D_1E_1, а образом точки M будет какая-то точка M_1, лежащая на прямой D_1E_1. Так как точки D_1 и E_1 лежат в плоскости α_1, то и вся прямая D_1E_1 лежит в этой плоскости, и, в частности, точка M_1 лежит в плоскости α_1. Итак, образом произвольной точки M плоскости α при данном движении является точка M_1 плоскости α_1.

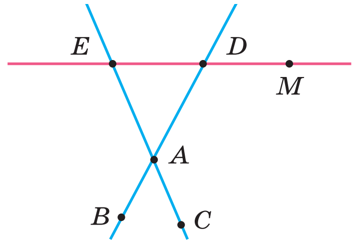


Рис. 234

Аналогично доказывается, что любая точка M_1 плоскости α_1 является при данном движении образом некоторой точки M плоскости α. Это и означает, что при данном движении плоскость α переходит в плоскость α_1.

Сформулируем ещё две теоремы, в которых речь идёт о наложениях и движениях плоскости. Первая из них доказана в учебнике [4].

ТЕОРЕМА 4

Любое наложение плоскости является движением, и обратно: любое движение плоскости (т. е. отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между точками) является наложением.

ТЕОРЕМА 5

Любое движение плоскости является композицией не более чем трёх осевых симметрий.

Иначе говоря, любое движение плоскости можно представить как последовательное выполнение не более чем трёх осевых симметрий на этой плоскости. Доказательство этого утверждения имеется в [2], с. 88—89. Отметим, что это утверждение содержится среди исследовательских задач в учебнике [7].

Вернёмся теперь к вопросу о равносильности двух определений равных фигур для плоских фигур, лежащих в одной плоскости (выше мы назвали эти определения определением 1 и определением 2).

ТЕОРЕМА 6

Определения 1 и 2 для фигур, лежащих в одной плоскости, равносильны.

Доказательство. Докажем, что если две фигуры Φ и Φ_1, лежащие в некоторой плоскости α, равны по определению 2, то они равны по определению 1, и обратно.

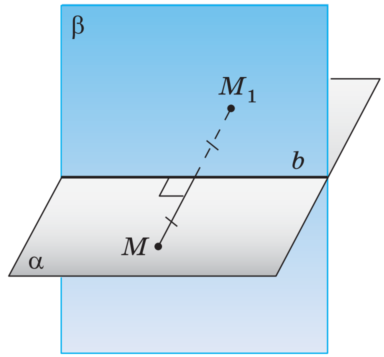


Рис. 235

Пусть $\Phi = \Phi_1$ по определению 2, т. е. существует наложение плоскости α, при котором фигура Φ совмещается с фигурой Φ_1. Наложение плоскости является её движением (по теореме 4), а любое движение плоскости можно представить в виде композиции не более чем трёх осевых симметрий (по теореме 5). Осевой симметрии на плоскости α с какой-то осью b соответствует зеркальная симметрия в пространстве относительно плоскости β, проходящей через прямую b перпендикулярно к плоскости α (рис. 235). При этой зеркальной симметрии происходит, очевидно, осевая симметрия на плоскости α относительно оси b (обоснуйте это). Зеркальная симметрия является движением пространства.

Таким образом, композиция не более чем трёх зеркальных симметрий является тем движением пространства, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ_1, т. е. эти фигуры равны по определению 1 равенства пространственных фигур.

Обратно: пусть фигуры Φ и Φ_1, лежащие в плоскости α, равны по определению 1, т. е. существует движение G пространства, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ_1. Докажем, что тогда фигуры Φ и Φ_1 равны и по определению 2, т. е. существует наложение плоскости α, при котором фигура Φ совмещается с фигурой Φ_1.

Если фигура Φ содержит три точки, не лежащие на одной прямой (обозначим их A, B и C), то при движении G пространства они переходят в некоторые точки A_1, B_1 и C_1, принадлежащие фигуре Φ_1 (а значит, и плоскости α) и не лежащие на одной прямой. Отсюда следует (по теореме 3), что при движении G плоскость α отображается на себя, а поскольку это отображение является движением плоскости, то оно является в то же время наложением плоскости α (по теореме 4), при котором фигура Φ совмещается с фигурой Φ_1, т. е. $\Phi = \Phi_1$ по определению 1.

Если же все точки фигуры Φ (будем считать, что их число не менее двух, для фигуры, состоящей из одной точки, утверждение теоремы очевидно) лежат на одной прямой (обозначим её буквой a), то и все точки фигуры Φ_1 лежат на некоторой прямой a_1 — той, в которую при движении G переходит прямая a (по теореме 2). Согласно условию фигуры Φ и Φ_1, а значит, и прямые a и a_1 лежат в плоскости α. Пусть при движении G плоскость α отображается на плоскость β. Если плоскость β совпадает с плоскостью α, то при движении G плоскость α накладывается на себя, и утверждение верно. Если α и β — различные плоскости, то они пересекаются по прямой a_1. Сделаем поворот P пространства вокруг прямой a_1 так, чтобы плоскость β совместилась с плоскостью α. Композиция (последовательное выполнение) движения G и поворота P является движением пространства, при котором плоскость α накладывается на себя так, что фигура Φ совмещается с фигурой Φ_1. Таким образом, $\Phi = \Phi_1$ по определению 2.

Историческая справка

Сначала мы расскажем об истории собственно стереометрии, а затем об истории некоторых областей современной геометрии.

Евклид

Стереометрия. Изучение стереометрии началось почти одновременно с изучением планиметрии. Вычислением объёмов занимались ещё в Древнем Египте, Вавилонии и Древнем Китае. Трактат «Начала», в котором Евклид (около 325—265 гг. до н. э.) изложил древнегреческую геометрию, включает не только планиметрию, но и стереометрию. Ей посвящены три последние книги «Начал»: 11-я (общие сведения), 12-я (объём пирамиды и шара) и 13-я (правильные многогранники).

Вычисление объёма пирамиды вызывало трудности, потому что требовало применения перехода к пределу в том или ином виде. Для вычисления объёма пирамиды Евдокс Книдский разработал специальный метод, впоследствии получивший название метода исчерпывания. Труды самого Евдокса не сохранились, но его результаты детально изложены в «Началах» Евклида.

Архимед (287—212 гг. до н. э.) первым вычислил объём шара. Для этого он доказал, что объём цилиндра, описанного вокруг шара, в полтора раза больше объёма шара. Тем самым вычисление объёма шара сводилось к вычислению объёма цилиндра, а вычислять объём цилиндра в то время уже умели. Архимед считал эту теорему о шаре и цилиндре одним из важнейших своих достижений и даже завещал установить на его надгробии цилиндр и шар; по этому знаку впоследствии Цицерон нашёл на Сицилии заброшенную и заросшую терновником могилу Архимеда. Архимед обнаружил также 13 полуправильных многогранников, грани которых правильные, но не обязательно равные многоугольники. Четырнадцатый полуправильный многогранник был обнаружен лишь в 1957 г. российским математиком В. Г. Ашкинузи.

Архимед

Координаты первыми стали использовать Рене Декарт (1596—1650) и Пьер Ферма (1601—1665). Они ввели координаты на плоскости, а о возможности ввести координаты в пространстве они лишь упоминали. Первым ввёл и применил координаты в пространстве Алексис Клод Клеро.

Рене Декарт

Основные исследования Декарта по геометрии связаны с методом координат. Но он занимался также изучением выпуклых многогранников и установил в 1620 г., что число вершин В, число рёбер Р и число граней Г связаны соотношением $В - Р + Г = 2$. Записки Декарта, содержащие этот результат, были опубликованы лишь в 1860 г. В 1758 г., когда эту формулу снова открыл Леонард Эйлер (1707—1783), об исследованиях многогранников Декартом известно не было, и эту формулу стали называть формулой Эйлера.

Понятие вектора в математику и физику ввёл ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865), хотя некоторое представление о векторах задолго до него имели Галилей и Ньютон. Гамильтон определял векторы с помощью координат.

Пьер Ферма

Конические сечения. Изучение свойств сечений конуса началось ещё в Древней Греции. Первоначально они определялись как сечения конической поверхности плоскостью, перпендикулярной к образующей. Эллипс, парабола и гипербола получаются соответственно для конуса с остроугольным осевым сечением, прямоугольным и тупоугольным. Затем Аполлоний Пергский (3—2 вв. до н. э.) доказал, что любое сечение конической поверхности является эллипсом, параболой или гиперболой. Он также детально изучил свойства этих кривых. Впоследствии Кеплер обнаружил, что планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, а Ньютон вывел это свойство орбит планет из предложенного им закона гравитации: притяжение двух материальных точек пропорционально произведению их масс, делённому на квадрат расстояния между ними.

Леонард Эйлер

Геометрия поверхностей в пространстве. Для точек поверхности, расположенной в пространстве, можно определить расстояние между точками как наименьшую длину кривой, проходящей по поверхности и соединяющей эти точки. Внутренняя геометрия поверхностей изучает те свойства, которые можно выразить через эти расстояния; название «внутренняя геометрия поверхностей» связано с тем, что такие свойства сохраняются при изгибании поверхности. Очень интересная геометрия получается в случае, когда поверхность — сфера; она называется сферической геометрией. Основы геометрии поверхностей в пространстве заложили Эйлер и Монж, детально она была разработана в трудах К. Ф. Гаусса (1777—1855).

Геометрия Лобачевского. Формулировка пятого постулата Евклида, эквивалентного аксиоме параллельных прямых (через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной), была гораздо сложнее, чем формулировки остальных аксиом и постулатов. Поэтому уже в глубокой древности предпринимались попытки вывести пятый постулат из остальных аксиом. Но все эти попытки не увенчались успехом. В начале XIX в. у нескольких математиков возникла мысль, что возможна геометрия, в которой на плоскости через данную точку проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую. Эту геометрию изучали Гаусс и Янош Бойяи, но первым публично выступил с идеей о возможности такой геометрии Н. И. Лобачевский (1792—1856) в 1826 г. Он же наиболее глубоко из своих современников разработал эту идею. В связи с этим новая геометрия получила название «геометрия Лобачевского». Часто её называют также неевклидовой геометрией, чтобы подчеркнуть её отличие от геометрии Евклида.

К. Ф. Гаусс

Н. И. Лобачевский

Многомерная геометрия. Как уже было сказано, Гамильтон определял векторы с помощью координат. Такой подход позволил рассматривать векторы не только с двумя или тремя координатами, но и с любым числом координат. Так Гамильтон смог ввести понятие n-мерного пространства, в котором вектор имеет n координат. Одновременно с Гамильтоном понятие многомерного пространства ввёл немецкий математик Герман Грассман (1809—1877). Подход Грассмана был более абстрактный и сначала воспринимался математиками с трудом, но впоследствии этот подход оказался очень плодотворным и нашёл широкое применение не только в геометрии, но и в алгебре. Грассман ввёл скалярное произведение векторов в n-мерном пространстве.

В 1854 г. немецкий математик Бернхард Риман (1826—1866) обобщил понятие многомерного пространства, рассматривая искривлённые пространства.

Бернхард Риман

Феликс Клейн

Он показал, как можно находить расстояния между точками таких пространств. Эти пространства получили название римановых. Теория римановых пространств включает в себя геометрию Лобачевского и сферическую геометрию как частные случаи. Римановы пространства широко применяются в современной физике. Именно в их терминах формулируется общая теория относительности Эйнштейна.

Эрлангенская программа Клейна. Большую роль в формировании современного представления о геометрии сыграла так называемая эрлангенская программа немецкого математика Феликса Клейна (1849—1925), сформулированная им на лекции, прочитанной в 1872 г. в Эрлангенском университете. В этой программе Клейн предложил систематизацию геометрии на основе движений или каких-то других преобразований. По мнению Клейна, важнейшая задача геометрии — изучение свойств, сохраняющихся при данных преобразованиях. Под геометрией Клейн подразумевал не только евклидову геометрию, но и другие геометрии — геометрию Лобачевского, геометрию на сфере, проективную геометрию; различным геометриям соответствуют различные множества преобразований.

Основания геометрии. В связи с открытием геометрии Лобачевского возник интерес к исследованию основных понятий геометрии и соотношений между ними, прежде всего к исследованию непротиворечивости и полноты системы аксиом геометрии. Непротиворечивость системы аксиом означает, что эти аксиомы не противоречат друг другу. Непротиворечивость устанавливается предъявлением модели, в которой выполняются данные аксиомы. Полнота состоит в том, что все свойства, которые рассматриваются в теории, должны выводиться из данных аксиом. Система аксиом, предложенная Евклидом, была непротиворечивой, но она не была полной. Например, из его аксиом нельзя вывести, что две окружности радиуса AB с центрами A и B пересекаются. Полную систему аксиом евклидовой геометрии построил немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) в 1899 г. Другую систему аксиом предложил Герман Вейль в 1916 г. — она основана на понятии вектора.

Давид Гильберт

Не следует думать, что к настоящему времени развитие геометрии завершено и всё, что можно, в ней открыто и обосновано. Геометрия, как и другие науки, успешно развивается и обогащается новыми крупными результатами, расширяет сферу своих приложений и находит всё новых и новых приверженцев.

Основные формулы планиметрии

Треугольник

a, b, c — длины сторон

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр

h_a — высота треугольника

S — площадь треугольника

r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей

Неравенство треугольника: $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$

Сумма углов треугольника: $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

Формулы площади треугольника:

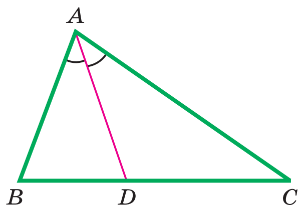
$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=pr=$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

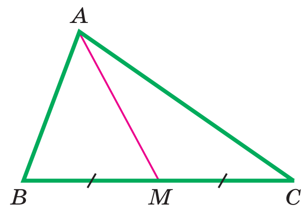
AD — биссектриса треугольника

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$; $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$

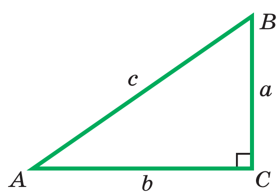


AM — медиана треугольника

$AM^2=\frac{1}{4}(2AC^2+2AB^2-BC^2)$



Прямоугольный треугольник



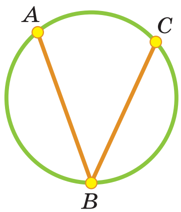
Теорема Пифагора: $c^2=a^2+b^2$

$\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}$

Окружность

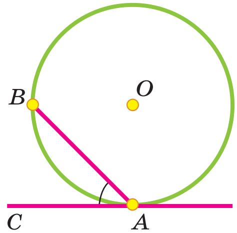
Вписанный угол:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$$



Угол между касательной и хордой:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile AB$$

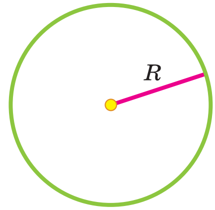


Длина окружности:

$$l = 2\pi R$$

Площадь круга:

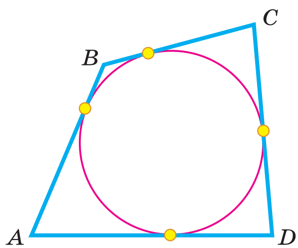
$$S = \pi R^2$$



Четырёхугольники

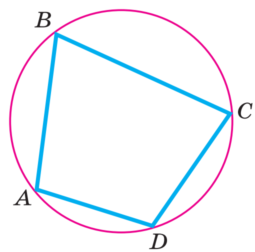
Свойство описанного четырёхугольника:

$$AB + CD = AD + BC$$



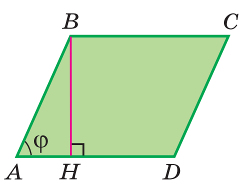
Свойство вписанного четырёхугольника:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$$



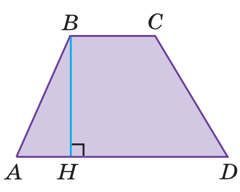
Площадь параллелограмма:

$$S = AD \cdot BH = AB \cdot AD \cdot \sin\varphi$$



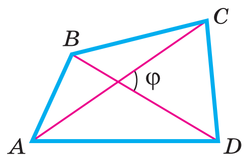
Площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$



Площадь четырёхугольника:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$$



Ответы и указания

Глава 1

1. а) Да. б) Да. в) Нет. г) Да. д) Нет. е) Прямая KM. ж) Да. з) Нет. и) Да. к) Да. Указание. Рассмотреть треугольник ABC с прямым углом C. **2.** а) Нет. в) Да. г) Нет. е) Да. ж) Да. з) Да. и) Нет. к) Да. Указание. Рассмотреть четырёхугольник $ABCD$ с прямыми углами B и D. **3.** а) 5. б) Нет. в) 3. г) 7 см. д) $\sqrt{b^2+2a^2}$. е) 4 см. **4.** а) 2. б) Нет. в) 4. г) 6 см. д) 10 см. е) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **5.** б) $\sqrt{3}$ и 60°. в) 3 см. д) 13 см. е) 10 см^2. ж) 10 см. з) 8 см. **6.** а) $\angle AMH < \angle ANH$. б) 5 см. в) 16 см. д) 5 см. е) 25 см^2. ж) 14 см. з) 3 см. **7.** г) 8 см. **8.** б) Да. Указание. Точки A, B и C могут лежать на одной прямой. г) 45 см. **9.** б) 60°. в) $d\cos\varphi$. г) $2d$. д) 0,8. е) 45°. ж) 45°. **10.** б) 45°. в) $d\cos\varphi$. г) d. д) 60°. е) $5\sqrt{2}$. ж) 45°. **11.** в) Нет. г) Указание. Доказать, что $MA^2+MB^2=AB^2$. д) Указание. Пусть M — точка пересечения прямой QR с ребром BD; рассмотреть два случая: 1) прямая MP пересекает ребро AB; 2) прямая MP пересекает ребро AD. е) 1. ж) Указание. Рассмотреть сечение тетраэдра плоскостью, содержащей ребро и середину противоположного ребра, и воспользоваться формулой, выражающей медиану треугольника через его стороны. **12.** в) Нет. д) Указание. Пусть E — точка пересечения прямой MN с ребром BD; рассмотреть два случая: 1) прямая EL пересекает ребро BC; 2) прямая EL пересекает ребро CD. е) $a\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$. ж) Указание. Рассмотреть сечение тетраэдра плоскостью, содержащей ребро и середину противоположного ребра. **13.** а) $a\sin\varphi$. б) 90°. д) 30°. **14.** а) $a|\cos\varphi|$. д) 30°. **15.** а) $h\cos\varphi$. г) 60°. д) 30°. е) 45°. ж) 5. з) 1. **16.** а) $S\cos\varphi$. г) 45°. д) 45°. е) 45°. ж) 5. з) 1, 2, 3, 6. **17.** а) Нет. г) Да. д) Указанные прямые — скрещивающиеся. е) Указание. Предположив, что рассматриваемые прямые имеют общую точку, доказать, что эта точка принадлежит ребру. **18.** а) Указанные прямые — параллельные; скрещивающиеся; скрещивающиеся. г) Да. д) Указанные прямые — скрещивающиеся. е) Нет. Указание. Рассмотреть случай, когда данная точка лежит на прямой, пересекающей одну из данных прямых и параллельной другой прямой. **19.** а) 5 и $4\sqrt{2}$. д) Указание. Рассмотреть линию пересечения указанной плоскости с плоскостью KLM. **20.** д) Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 19д. **21.** а) Да. в) Нет. Указание. Рассмотреть ортогональную проекцию равностороннего треугольника на плоскость, содержащую ровно две вершины этого треугольника. ж) $2\sqrt{3}a\sqrt{a^2-h^2}$. **22.** в) Нет. Указание. См. указание к задаче 21в. ж) 7,5. **23.** д) 4 см. ж) 4 см. з) 15 см. **24.** а) 4 : 3. д) 5 см. ж) 8 см.

з) 2,5 см. **25.** г) Указания. Способ 1. Воспользоваться утверждением 1° п. 14. Способ 2. Воспользоваться утверждением 3° п. 14. д) Да. Указание. Пусть плоскости α и β параллельны, плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a. В плоскости γ провести прямую c, пересекающую прямую a, в плоскости β выбрать точку M, не лежащую на прямой c, и провести плоскость через прямую c и точку M. е) Указание. Воспользоваться задачей 25 д. ж) 5 см. з) 12 см; точки A и B лежат по одну сторону от точки M. **26.** г) Указание. Воспользоваться задачей 25 д. д) Да. Указание. Рассмотреть плоскость, содержащую данную прямую и пересекающую другую плоскость. ж) 3 см. з) 2 см или 14 см; точки A и M лежат по одну сторону от точки B. **27.** б) 10 см^2. г) 42 см^2. д) 8 см и 9 см. е) Указание. Сначала доказать, что проекции прямых B_1M и ON на плоскость ABC взаимно перпендикулярны. ж) $3\sqrt{3}$ см^2. **28.** б) 20 см^2. г) 25 см^2. д) 3 см, 4 см и 12 см. ж) $\sqrt{3}$ см^2. **29.** в) 1. г) 1. Указание. Доказать, что искомое расстояние равно длине перпендикуляра, проведённого из середины отрезка BD к прямой BD_1. д) 90°. е) 90°. Указание. Провести прямую BD. **30.** в) 2,4. г) 2,4. Указание. Доказать, что искомое расстояние равно длине перпендикуляра, проведённого из точки A к прямой BD. д) 90°. е) 60°. Указание. Провести прямую A_1C_1. **31.** Указание. Если не все данные точки лежат на одной прямой, то выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, и провести через них плоскость. **32.** а) Указание. Рассмотреть плоскость, содержащую точки пересечения трёх данных прямых. б) Указание. Если не все прямые проходят через одну точку, то можно выбрать три прямые, точки пересечения которых попарно различны. **33.** Указания. а) Воспользоваться теоремой Пифагора применительно к треугольнику AHM. б) Взять в качестве множества Φ прямую. **34.** Точка или окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий данную точку плоскости и проекцию данной точки пространства. Указание. Воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах. **36.** Указание. Сначала доказать, что проекция точки D равноудалена от прямых OA и OB. **37.** Указание. Провести перпендикуляр MH_1 к прямой AB и воспользоваться тем, что $MH_1 > MH$. **38.** На 24 части. Указание. Тетраэдр разделён на пирамиды, основания которых расположены в гранях. **39.** 4 см^2. **41.** б) Указание. Рассмотреть развёртку тетраэдра. **42.** Указание. Рассмотреть развёртку тетраэдра, у которой все боковые грани по-прежнему имеют общую вершину. **43.** Треугольник, вершинами которого являются середины рёбер AB, AC и AO. **44.** Указание. Воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах. **45.** Указание. Воспользоваться утверждениями задач 13 ж и 14 ж. **47.** $\frac{1}{3}$. Указание. Способ 1. Сначала доказать, что площадь проекции одной грани тетраэдра на другую в 3 раза меньше площади грани, а затем воспользоваться задачей 16 а. Способ 2. Рассмотреть сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через его ребро и середину противоположного ребра. **48.** Указание. Способ 1. Сначала провести высоту DH треугольника ABD и доказать, что $CD \perp DH$ и $CH \perp AB$. Способ 2. Пусть α, β и γ — двугранные углы тетраэдра $ABCD$ при рёбрах BC, CA и AB. Воспользовавшись задачей 16 а, сначала доказать, что $S_{ABC} = S_{BCD}\cos\alpha + S_{CAD}\cos\beta + S_{ABD}\cos\gamma$, а затем выразить косинусы углов α, β и γ через площади граней тетраэдра. **50.** Указание. Рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную к прямой, проходящей через середины рёбер AB и CD. **51.** $\frac{1}{2}$. Указание. Воспользоваться тем, что площадь четырёхугольника не превосходит половины произведения его диагоналей, а площадь треугольника не превосходит половины произведения его сторон. **52.** 7. **53.** Указание. Учесть, что $A_1B_1 \parallel FG$ и $A_1B_1 = 2FG$. **54.** Указание. Сначала доказать, что сечение произвольного двугранного угла может быть углом любой заданной величины. **55.** Указание. Сначала доказать, что отрезки MO и NL равны и параллельны. **56.** 1 : 3. Указание. Рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную к прямой BD. **57.** Например, вершины A, B_1, C и D_1. **58.** 60°. **61.** Указание. Рассмотреть середины рёбер, не имеющих общих точек с данной диагональю. **62.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Рассмотреть сечение куба плоскостью ACC_1. б) 1 : 2, считая от точки B (B_1). Указание. Рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную к прямой A_1C.

Глава 2

63. а) Четыре. б) 4 см³. в) 32 см³. г) $a^3\sqrt{2}$. д) $\frac{1}{2}h(S - hP)$. е) 3 см, 4 см, 12 см. ж) Указание. Сложить неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$, $2bc \leqslant b^2 + c^2$ и $2ca \leqslant c^2 + a^2$. **64.** а) Шесть. б) 36 см³. в) 288 см³. г) $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. д) 4 см³. е) 7 см, 24 см, 5 см. ж) Указание. Воспользоваться утверждением задачи 63 ж, записанным в виде неравенства. **65.** а) $2\sqrt{2}$. б) 3 см³. д) 5 см³. е) $(2+\sqrt{2})S$. ж) $2(1+\sqrt{2})$. з) 24 см³. и) $3a^2$. Указание. Воспользоваться тем, что основание призмы является ортогональной проекцией её сечения. к) $5a^2$. Указание. Пусть M — точка пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4; сначала доказать, что $\triangle MA_2A_3 \sim \triangle A_2A_3A_1$ и $A_1M = A_1A_2$, а затем выразить диагональ A_1A_3 через a. **66.** а) $384\sqrt{3}$. б) $\frac{375}{8}$. д) 6 см³. е) $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})S$. ж) $12\sqrt{39}$. з) 38 см³. и) $3a^2$. к) $11a^2$. **67.** а) $DC_1 = 2AO$. б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. г) 5 см². д) 120 см². е) Указание. Сначала доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. **68.** б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. г) 60 см³. д) 4 см. е) Указание. Воспользоваться тем, что параллелограмм с равными диагоналями — прямоугольник. **69.** б) 2 : 5. в) 16 см³. д) $\frac{27}{4}$. ж) Указание. Сначала доказать, что прямая, по которой пересекаются плоскости ABM и CDP, параллельна прямой AB. з) 90 см². и) $\frac{\sqrt{3}}{48}$. **70.** б) 1 : 4. в) 70 см³. д) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. ж) Указание. Сначала построить линию пересечения плоскостей PAB и PCD. з) 14 см². и) $\frac{1}{3}ph^2 \operatorname{ctg}\alpha$. **71.** б) Указание. Воспользоваться утверждением задачи 16 б. в) Указание. Сначала на одном из рёбер отложить отрезок, равный 1, а затем через конец этого отрезка в плоскостях граней, содержащих это ребро, провести прямые, перпендикулярные к нему. г) $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos B}$. Указание. Из точки A провести перпендикуляры к прямым OB и OC. **72.** а) Указание. См. указание к задаче 71 б. в) $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Указание. Рассмотреть плоскость, перпендикулярную к одному из рёбер трёхгранного угла. г) $\operatorname{tg}\angle AOC = \operatorname{tg} B \sin\alpha$. **73.** а) Да. Нет. в) 90°. д) $-\frac{1}{3}$. Указание. Взять две грани с общим ребром и применить теорему косинусов к треугольнику, вершинами которого являются середина этого ребра и противоположные ему вершины граней. ж) $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$. Указание. См. указание к задаче 73 д. **74.** а) Нет. Указание. Приставить к каждой грани куба равный ему куб. в) 108°. д) Указание. Способ 1. Сравнить результаты задач 47 и 73 д. Способ 2. Доказать, что середины рёбер правильного тетраэдра являются вершинами правильного октаэдра. ж) $-\frac{1}{5}\sqrt{5}$. Указание. Рассмотреть тетраэдр, вершинами которого являются вершина додекаэдра и концы выходящих из неё рёбер. **77.** Нет. Указание. Учесть, что секущая плоскость пересекает противоположные грани параллелепипеда по параллельным отрезкам, а параллелепипед имеет три пары противоположных граней. **78.** Нет. Указание. См. указание к задаче 77. **79.** $\sqrt{S_1S_2S_3}$. **80.** Да. Указание. Рассмотреть тетраэдр и плоскость, пересекающую все его грани. **81.** Указание. Достроить призму до параллелепипеда. **83.** а) Указание. Если число рёбер хотя бы одной грани многогранника больше 3, то у него не менее 8 рёбер; в противном случае число рёбер делится на 3. б) Указание. Воспользоваться тем, что число рёбер любой пирамиды чётное и от неё можно отсечь тетраэдр так, что число рёбер увеличится на три. **84.** Указания. а) Взять в качестве общей вершины пирамид какую-нибудь вершину куба, а в качестве оснований — грани куба, не содержащие этой вершины. б) Вырезать из куба тетраэдр, противоположными рёбрами которого являются диагонали противоположных граней куба. **85.** Указание. Сначала отрезать тетраэдр, гранью которого является основание призмы. **86.** Указание. Сначала доказать, что объём тетраэдра $AA_1B_1D_1$ равен одной шестой объёма параллелепипеда. **88.** Указание. Воспользоваться формулой задачи 87. **90.** Указание. Рассмотреть четыре тетраэдра с общей вершиной в указанной точке и приравнять сумму их объёмов объёму исходного тетраэдра. **91.** Указание. Рассмотреть три тетраэдра с общей вершиной M. **92.** Указание. Отложить от вершины трёхгранного угла на его рёбрах равные отрезки. **94.** Указание. Из оснований перпендикуляров провести перпендикуляры к прямой OP. **100.** Указание. Соединить данную точку отрезками с вершинами многогранника и приравнять сумму объёмов получившихся пирамид объёму многогранника.

Глава 3

101. а) 30°. б) 4π см^2. в) 13. г) 3. ж) $2S$. и) 13 см. **102.** а) $d\cos\alpha$. б) 5 см. в) 4. г) 240π см^2. ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}S$. и) 8 см. **103.** а) $2\pi R$ и $2R\operatorname{tg}\alpha$. б) $\frac{\pi ah}{\sqrt{3}}$. в) $\frac{\pi a^2h}{12}$. г) π см^2. д) 3π см^3. е) 6 см^3. ж) $V\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{180}\right)$. **104.** а) $\pi h^2\operatorname{ctg}\alpha$. б) $\frac{4\pi h}{3}\left(b+\frac{2h}{3}\right)$. в) $\frac{4\pi a^2b}{9}$. г) $(10+2\pi)$ см^2. д) $(\pi-3)$ см^3 и $(11\pi+3)$ см^3. е) 6 см^2. ж) $\frac{V}{\pi}[\operatorname{ctg}\alpha+$ $+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)]-V$. **105.** б) 4. в) 4. г) πS. д) 108π см^3. ж) Указание. Воспользоваться теоремой косинусов. з) 5 см. и) 18 см^2 и 32 см^2. **106.** б) 12. в) 1 : 2, считая от вершины конуса. г) 60°, 60°, 60°. д) 845π см^3. е) Rh, если $R\leqslant h$, и $\frac{1}{2}(R^2+h^2)$, если $R>h$. Указание. Воспользоваться задачей 105 ж и тем, что рассматриваемое сечение является равнобедренным треугольником, боковая сторона которого равна $\sqrt{R^2+h^2}$. ж) 75°. Указание. Выразить радиус основания и высоту конуса через его образующую и искомый угол и воспользоваться задачей 106 е. з) 30°. и) 50 см^2 и 18 см^2. **107.** а) $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. б) $\frac{\pi}{4}$. в) $\frac{\pi}{2}$. г) Равносторонний. д) $\frac{\sqrt{2}}{12}\pi l^3$. **108.** а) 60°. б) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. в) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. г) Равнобедренный прямоугольный. д) $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi l^3$. **109.** а) 2 см. б) 10 см. и) 4. **110.** а) 3 см. б) 18 см. и) 26. **111.** а) В 27 раз. б) $\frac{1}{3}\pi R^3$. в) $\frac{\pi}{6}$. г) 2,25. д) Объёмы равны. е) $\frac{\pi}{3}(2R^3-3dR^2+d^3)$. ж) 126π см^3. **112.** а) В 3 раза. б) $\frac{2}{9}\pi R^3$. в) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$. г) $\frac{9}{32}$. д) Площади равны. е) $\frac{\pi}{3}(2R^3+3dR^2-d^3)$. ж) 87π см^3. **113.** а) 2 см. б) 1. в) Отношения равны. г) $\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\varphi)$. д) $\frac{1+\cos\varphi}{2}S$. **114.** а) 36π. б) 3. в) Отношения равны. г) $2\pi R^2(1-\cos\varphi)$. д) $2\frac{S_2\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}$. **115.** Указание. Рассмотреть проекцию цилиндрической поверхности, параллельную её образующей. **116.** Цилиндрическая поверхность радиуса $\frac{d}{2}$, проходящая через данную точку и ось данной цилиндрической поверхности, или часть такой поверхности. **117.** Указание. Через точку пересечения секущей плоскости с осью цилиндра провести плоскость, параллельную плоскости основания. **120.** 2. **121.** 1,5. **124.** Сфера с диаметром AB без точек A и B. **125.** πa^2. **128.** Указание. Выразить радиус основания конуса через его высоту и радиус описанного шара. **129.** Указание. Выразить радиус основания конуса через радиус вписанной сферы и длину отрезка оси конуса, заключённого между вершиной конуса и вписанной сферой. **130.** $\cos\frac{180^\circ}{n}$; 1. Указание. Воспользоваться утверждениями задач 126 и 127. **132.** Существует, если $k>2$, и не существует, если $k=2$. **133.** 66π см^3. **134.** $262{,}08\pi$ см^3.

Глава 4

135. а) (1; 0; 0), (0, –2; 0), (0; 0; 5). б) 12, 5 и 13. в) 60°. г) $B(-2;-2;0)$, $C(-2;2;0)$, $D(2;2;0)$, $B_1(-2;-2;5)$, $C_1(-2;2;5)$, $D_1(2;2;5)$ или $B(2;2;0)$, $C(-2;2;0)$, $D(-2;-2;0)$, $B_1(2;2;5)$, $C_1(-2;2;5)$, $D_1(-2;-2;5)$. е) $B(15;0;0)$, $C(-15;0;0)$ или $B(-15;0;0)$, $C(15;0;0)$. ж) Указание. Воспользоваться утверждением задачи 26е. **136.** а) (–2; 3; –7). б) 4, 8 и 8. в) 45°. г) $B(-2;0;0)$, $D(2;4;0)$, $A_1(2;0;8)$, $B_1(-2;0;8)$, $C_1(-2;4;8)$, $D_1(2;4;8)$ или $B(-2;0;0)$, $D(2;4;0)$, $A_1(2;0;-8)$, $B_1(-2;0;-8)$, $C_1(-2;4;-8)$, $D_1(2;4;-8)$. е) $D(0;0;5)$ или $D(0;0;-5)$. ж) Указание. Воспользоваться формулами задачи 135ж. **137.** а) $M(1;0;-3)$, $B(2;3;6)$. б) $D(5;-10;18)$. в) $M(3;-1;-5)$. г) 17. **138.** а) $C(-9;8;7)$, $M(-2{,}5;3;1{,}5)$. б) 3 или 25. в) $B(-7;-3;6)$. г) 6. **139.** а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$. в) Указание. Воспользоваться определениями противоположного вектора и равных векторов. г) Прямая AB либо параллельна плоскости α, либо перпендикулярна к ней. д) Указание. Сначала доказать, что $PQ \parallel AC$ и $MN \parallel AC$. **140.** а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$. в) Указание. Воспользоваться задачей 139в. г) Прямая AB либо параллельна прямой a, либо перпендикулярна к ней. д) Указание. Сначала доказать, что $MNQP$ — параллелограмм. **141.** а) Равны по модулю и противоположны по знаку. б) {–2; 2; –1}, 3. в) 6. г) Указание. Найти AB, BC и CA. д) 3. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс, а точка D — на оси аппликат. е) 3. **142.** б) {–4; 2; 4}, 6. в) 18 и 15. д) 8,125. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом B так, чтобы середина стороны AC лежала на оси абсцисс, а точка D — на оси аппликат. е) 7. **143.** а) 3, 3, 3 и 90°, 90°, 90°. б) Острый. Указание. Ввести прямоугольную систему координат. в) 45° или 135°. г) 8; 0,6. **144.** а) 15, 15, 15 и 90°, 90°, 90°. б) Прямой. в) 60° или 120°. г) –1; 0,6. **145.** б) $\overrightarrow{AD_1}$ или $\overrightarrow{BC_1}$. в) 25. д) 2. **146.** б) $\overrightarrow{AD_1}$ или $\overrightarrow{BC_1}$. в) 3. д) 5. **147.** а) Да. б) 0,5. в) $(2;\sqrt{3};\sqrt{3})$. д) (–2,4; 1; 3,2) или (–1,6; 5; –1,2). **148.** а) Да. б) 2. в) $(-2\sqrt{3};2;3)$. д) (–1; 5; –10) или (7; –7; 14). **149.** а) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{AA_1}=-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{CB}$. б) $x=1$. Указание. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то существуют такие числа p и q, что $\vec{b}=p\vec{a}+q\vec{c}$. Приравнять соответственные координаты векторов $\vec{b}$ и $p\vec{a}+q\vec{c}$ и найти сначала p и q, а затем x. в) $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. Указание. Записать разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с неизвестными пока коэффициентами p, q и r и, приравняв соответственные координаты, найти p, q и r. **150.** а) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}=-4\overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{BC}$. б) При всех x. в) $\vec{d}=-3\vec{a}-0\vec{b}+2\vec{c}$. **151.** а) –8 и 0. б) 7. в) $\frac{29}{35}$. г) 15. Указание. Найти синус одного из углов треугольника MNC_1. д) 3. Указание. Найти $\sin\angle MAD$. **152.** а) –25 и 0. б) 3. в) –0,6. г) 3. Указание. Найти синус одного из углов треугольника MNC_1. д) 7. Указание. Найти $\sin\angle BAC$. **153.** а) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=1$; $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=25$. б) $x^2+y^2+z^2=3$; $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$. в) $R=9$ и $C(3; 0; 0)$; $R=4$ и $C(0; 0; -1)$. г) $(4; 0; 0)$ и $(-2; 0; 0)$. д) $3x+2y-z-1=0$. е) $3x+y-2z-5=0$. ж) $(3; -4; 0)$. з) Указание. Воспользоваться тем, что плоскость проходит через начало координат. и) $x-2y+2z-18=0$. Указание. Воспользоваться тем, что вектор $\overrightarrow{OM}$ является вектором нормали к искомой плоскости (точка O — начало координат). к) $2(x-2)+y-1-2(z+2)=0$. **154.** а) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$; $(x-4)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9$. б) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=36$; $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=41$. в) $R=1$ и $C(2; -3; 0)$; $R=5$ и $C(3; -2; 4)$. г) С осями Oy и Oz. д) $-2x+z=0$. е) $-y+z+3=0$. ж) $(0; 0; 3)$. з) Указание. Воспользоваться тем, что вектор нормали к плоскости перпендикулярен к оси Oz. и) $x-2y+2z-27=0$. Указание. Воспользоваться тем, что искомая плоскость проходит через точку, симметричную точке M относительно начала координат. к) $(x+2)^2+(y+12)^2+(z-11)^2=225$ или $(x-8)^2+(y-8)^2+(z+9)^2=225$. **155.** а) 2 и $\frac{8}{3}$. б) $2x-2y+z+13=0$ и 5. в) $\frac{12}{13}$ и $\frac{12}{13}$. г) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ и $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

д) Пересекаются, $r=\frac{5}{13}$; не пересекаются. **156.** а) $\frac{10}{9}$ и $\frac{28}{9}$. б) $12y-5z+44=0$ и 4. в) $\frac{24}{13}$ и $\frac{12}{13}$. г) $\frac{6}{\sqrt{26}}$. д) Пересекаются, $r=\frac{5}{13}$; не пересекаются. **157.** а) 1) $\frac{6}{7}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$; 3) $\arcsin\frac{6}{7}$; 4) $\arccos\frac{41}{49}$. б) 1) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; 2) $\arccos\frac{2}{5}$; 3) $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 4) $\arccos\frac{5}{6}$. в) 1) $\arccos\frac{13}{\sqrt{230}}$; 2) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{7}$; 3) $\arccos\sqrt{\frac{5}{19}}$. д) 60°.

158. а) 1) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$; 2) $\arccos\frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$; 3) $\arcsin\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$;

4) $\arccos\frac{|a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2|}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$. б) 1) $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+4b^2c^2+16a^2c^2}}$; 2) $\arccos\frac{2a}{\sqrt{a^2+4c^2}\sqrt{b^2+4a^2}}$;

3) $\arcsin\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2b^2+4b^2c^2+a^2c^2}}$; 4) $\arccos\frac{a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}{\sqrt{a^2b^2+4b^2c^2+a^2c^2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+4a^2c^2}}$.

в) 1) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{35}$; 2) $\arcsin\frac{8\sqrt{5}}{35}$; 3) $\arccos\frac{4\sqrt{85}}{85}$. д) 1) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\arccos\frac{1}{3}$.

161. а) $\frac{10}{7}$, $-\frac{5}{4}$ и $\frac{2}{11}$. б) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{2}$. в) 2 и $\frac{5}{3}$. **162.** а) $-\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. б) 1 и $-\frac{1}{2}$. в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{2}$. **165.** г) $(2; -3; 11)$. ж) Нет. Указание. Рассмотреть треугольник, симметричный треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно точки A_1. **166.** г) $\{2; 0; -2\}$. **169.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. **170.** $z^2=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\operatorname{ctg}^2\varphi$. **171.** Продолжение луча BA, где $A(-8; 6; -3)$ и $B(6; 1; -1)$ вместе с точкой B. Указание. Воспользоваться тем, что $AB=15$. **173.** Указание. Представить вектор $\overrightarrow{MN}$

в виде суммы векторов двумя способами. **174.** Указания. а) Воспользоваться утверждением задачи 12 ж. б) Воспользоваться утверждением задачи а. **176.** $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{13}$ или $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{13}$. Указание. Рассмотреть скалярное произведение векторов с координатами $\{3; 4; 12\}$ и $\{\cos\alpha\cos\beta; \sin\alpha\cos\beta; \sin\beta\}$. **177.** Указание. Доказать, что из выписанных равенств следует равенство $\overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$. **179.** Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$. **184.** $(x+1; -y-2; -z+3)$. **185.** n. **186.** $n+1$. **187.** Указания. а) Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$. б) Воспользоваться утверждением задачи а.

Задачи повышенной трудности

188. Указание. Рассмотреть ортогональные проекции A_1 и B_1 точек A и B на плоскости граней и доказать, что оба условия эквивалентны тому, что $AA_1 = BB_1$. **189.** Да. Указание. Рассмотреть треугольник HMN с тупым углом M, построить в его плоскости треугольник $A'MN$ так, что $MA' = MA$, $NA' = NA$ и точки A' и H лежат по одну сторону от прямой MN, а затем показать, что угол $MA'N$ может быть больше угла MHN. **190.** Указание. Сначала доказать, что любая точка проведённой прямой равноудалена от вершин соответствующей грани, и обратно: любая точка, равноудалённая от вершин грани, лежит на этой прямой, а затем провести плоскость через середину одного из рёбер тетраэдра перпендикулярно к нему. **193.** Указание. Рассмотреть развёртку тетраэдра. **195.** Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и воспользоваться утверждением задачи 194. **196.** Указание. Сначала доказать теорему для равностороннего треугольника, а затем воспользоваться утверждением задачи 194. **197.** а) 2, 4 и 6. б) Указание. Сначала построить проекцию прямой Эйлера проектируемого треугольника. **198.** Указание. Сначала доказать, что четырёхугольник, вершинами которого являются середины четырёх попарно противоположных рёбер, является параллелограммом, а затем воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. **199.** Указание. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно разрезать, например, на равные тетраэдры BD_1DA, BD_1DC, BD_1C_1C, $BD_1C_1B_1$, BD_1A_1A и $BD_1A_1B_1$. **200.** Указание. Рассмотреть сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно к его диагонали. **201.** Указание. Рассмотреть проекцию куба на плоскость, перпендикулярную к его диагонали. **202.** Указание. На прямой AB отметить произвольную точку R, построить точки P_1 и Q_1, в которых прямые RP и RQ пересекают прямые AC и AD, а затем построить точку пересечения прямых PQ и P_1Q_1. **203.** Указание. Сначала построить точку пересечения прямой PQ и плоскости ACD, воспользовавшись задачей 202. **206.** $\sqrt{3}$. Указание. Сначала доказать, что площадь проекции куба вдвое больше площади проекции некоторого треугольника, вершинами которого являются три вершины куба. **207.** Указание. Рассмотреть сечение параллелепипеда плоскостью ACC_1. **208.** Указание. Выразить двумя способами объём тетраэдра $ABCD$ и воспользоваться формулой задачи 48. **209.** Указание. Воспользоваться формулой задачи 87. **210.** Указание. Выразить отношение объёмов тетраэдров AA_1BC и AA_1CD двумя способами, взяв в качестве их оснований один раз грани ABC и ACD, а другой раз грани A_1BC и A_1CD. **211.** Указание. Выразить отношение высот AH и OH_1 тетраэдров $ABCD$ и $OBCD$ двумя способами: один раз через отношение $\frac{AO}{OA_1}$, а другой раз через площади граней тетраэдра $ABCD$. **212.** $\frac{1}{12}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{5}{12}V$. **213.** $\frac{3V}{2d}-\frac{S}{4}$. Указание. Внутри многогранника отметить точку, равноудалённую от плоскостей α и β, и разрезать многогранник на пирамиды с вершиной в ней. **214.** Указание. Учесть, что двугранные углы при основании правильной пирамиды равны. **216.** Указание. Пользуясь теоремой косинусов, доказать, что если $\angle PA_1A_2 \geqslant 90°$, то $PA_{i+1} > PA_i$ (подразумевается, что $PA_{n+1} = PA_1$) и, следовательно, не существует наибольшего бокового ребра; если же $\angle PA_1A_2 < 90°$ и $\delta_i = \left| PA_i - \frac{A_1A_2}{2\cos\angle PA_1A_2} \right| \neq 0$, то $\delta_{i+1} < \delta_i$ и по аналогичной причине не существует наименьшей из величин δ_i. **217.** $2S\cos\theta$. Указание. Рассмотреть ортогональную проекцию первого сечения на плоскость второго сечения. **218.** Указание. Построить параллелепипед с рёбрами OA, OB и OC и приравнять три выражения для его объёма, беря поочерёдно в качестве основания параллелепипеда грань, лежащую в плоскости OBC, OCA и OAB. **219.** Указание. Рассмотреть линии пересечения плоскостей противоположных плоских углов. **220.** а) Могут быть неравными. Указание. Рассмотреть четырёхугольную пирамиду, в основании которой лежит ромб и основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей ромба. б) Могут быть неравными. Указание. Рассмотреть четырёхугольную пирамиду, в основании которой лежит прямоугольник и основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей прямоугольника. **221.** а) $\angle A_1O_1B_1 = 180° - \angle C$, $\angle B_1O_1C_1 = 180° - \angle A$ и $\angle C_1O_1A_1 = 180° - \angle B$. Указание. Пусть плоскость $O_1A_1B_1$ пересекает луч OC в точке M. Доказать, что угол A_1MB_1 — линейный угол двугранного угла с ребром OC. б) Указание. Доказать, что рёбра трёхгранного угла $OABC$ перпендикулярны к соответствующим граням трёхгранного угла $O_1A_1B_1C_1$. **222.** Указание. Пусть ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. На рёбрах, выходящих из вершины A, отметить точки на расстоянии 3 от неё; аналогично отметить точки на рёбрах, выходящих из вершины C_1. **223.** Указание. Ортогональная проекция правильного икосаэдра переходит в себя при повороте на 60°. **224.** Указание. Ортогональная проекция правильного додекаэдра переходит в себя при повороте на 36°. **225.** Указания. а) Подсчитать число сторон каждой грани, сложить эти числа и доказать, что сумма является чётным числом. б) Воспользоваться идеей решения задачи а. **226.** Указания. а) Учесть, что каждая грань имеет не менее трёх сторон и в каждой вершине сходятся не менее трёх рёбер. б) Воспользоваться неравенствами задачи а и формулой Эйлера. **227.** Указания. а), б) Воспользоваться неравенствами задачи 226 и формулой Эйлера. **228.** Указ а н и е. Предположить, что этот многогранник выпуклый, и воспользоваться формулой Эйлера. **229.** У к а з а н и е. Воспользоваться формулой Эйлера. **230.** Цилиндрическая поверхность наименьшего радиуса, проходящая через прямую a и точку A, из которой исключена точка A. **231.** У к а з а н и е. Пусть O — центр основания конуса. Сначала доказать, что двугранные углы $OPAB$ и $OPBA$ равны. **232.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что если боковая поверхность конуса касается обеих граней двугранного угла, то углы между ребром двугранного угла и образующими конуса, принадлежащими его граням, равны. **233.** $90° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$. У к а з а н и е. См. указание к задаче 232. **234.** $2R$. У к а з а н и е. Рассмотреть развёртку и сравнить путь, состоящий из образующей и диаметра меньшего основания, с любым другим путём. **235.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что площадь поверхности, получающейся вращением отрезка A_iA_{i+1}, не превосходит произведения числа π на разность квадратов длин ломаных $A_1A_2...A_{i+1}$ и $A_1A_2...A_i$, а затем разделить ломаную на две ломаные одинаковой длины и доказать, что площади соответствующих им поверхностей вращения не превосходят $\frac{1}{4}\pi l^2$. **236.** У к а з а н и я. а) Рассмотреть какое-нибудь сечение поверхности, а также все её сечения плоскостями, проходящими через центр первого сечения перпендикулярно к нему. б) Взять три точки поверхности и проходящую через них окружность, из точки поверхности, не лежащей на этой окружности, провести перпендикуляр к плоскости окружности и рассмотреть точки пересечения окружности и прямой, проходящей через её центр и основание перпендикуляра. **237.** У к а з а н и е. Рассмотреть плоскость, проходящую через середину общей хорды перпендикулярно к ней. **238.** Вершины куба, не являющиеся концами указанной диагонали. У к а з а н и е. Рассмотреть сферу, описанную около куба. **239.** $\sqrt{2}a$. У к а з а н и е. См. указание к задаче 238. **240.** У к а з а н и е. Найти объём правильного октаэдра, вписанного в сферу радиуса R, а затем, рассмотрев пирамиды с общей вершиной в центре этой сферы, доказать, что объём любого многогранника с шестью вершинами, вписанного в указанную сферу, не превосходит найденной величины. **241.** У к а з а н и е. Воспользоваться утверждением задачи 109 з. **242.** У к а з а н и я. а) Рассмотреть пересечения сферы S_D с гранями DAB и DBC. б) Пользуясь идеей решения задачи а, сначала доказать, что $\frac{MN}{LN} = \frac{BC \cdot AD}{AB \cdot CD} = \frac{PQ}{RQ}$. в) Воспользоваться формулами, полученными при решении задачи б. **243.** У к а з а н и е. Разрезать призму на пирамиды с общей вершиной в центре шара. **244.** У к а з а н и е. Сначала выразить площадь $\triangle ABM$ через площади граней ABC и ABD и двугранный угол $CABD$. **245.** Если сумма площадей любых двух граней отлична от суммы площадей двух других граней. У к а з а н и е. Выразить объём тетраэдра через площади его граней и радиусы указанных сфер. **246.** У к а з а н и я. а) Методом от противного доказать, что плоскость, проходящая через три точки касания, проходит и через четвёртую точку касания. б) Воспользоваться утверждением задачи а. **247.** У к а з а н и е. Сначала найти множество всех точек, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся прямых. **248.** б) Указание. Рассмотреть $2n$-угольник, вписанный в большую окружность сферы, выразить объём тела, полученного при вращении этого многоугольника вокруг его большей диагонали, через площадь поверхности тела и радиус сферы, а затем перейти к пределу при $n \to \infty$. **249.** Указание. Воспользоваться задачей 248 а. **250.** V. Указание. Сначала доказать, что точка касания сфер является центром сферы, вписанной в усечённый конус с основаниями, ограниченными общими окружностями сфер и конической поверхности, а затем воспользоваться утверждением задачи 249. **251.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в одной из вершин прямоугольника и двумя осями, содержащими стороны прямоугольника. **252.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в точке A и одной из осей, совпадающей с прямой AB. **253.** Либо сфера, либо точка, либо пустое множество. **254.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат. **255.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом A так, чтобы точка D лежала на оси координат, а точка B — в координатной плоскости. **256.** Указание. Воспользоваться тем, что вектор с координатами $\{x_0;\ y_0;\ z_0\}$ перпендикулярен к касательной плоскости. **257.** Либо окружность, либо точка, либо пустое множество. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы одна данная прямая была осью координат, а другая была параллельна оси координат. **258.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом A так, чтобы точки B, D и A_1 лежали на осях координат. **259.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. **260.** Указания. а) Выразить все рассматриваемые векторы через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. б) Воспользоваться задачей а. **261.** 4. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы точка с координатами (1; 0; 0) лежала на первом луче. **262.** Указание. См. указание к задаче 261. **263.** Указание. Воспользоваться методом координат. **264.** Указание. Рассмотреть точку, симметричную точке N относительно точки пересечения медиан тетраэдра $ABCD$. **265.** Указание. Рассмотреть трёхгранный угол $OABC'$, где точка C' симметрична точке C относительно точки O. **266.** Указание. Рассмотреть точку, центрально симметричную вершине тетраэдра. **267.** Указания. а) Рассмотреть тетраэдр, симметричный относительно оси Ox. б) Воспользоваться утверждением задачи а и указанием к ней. в) Воспользоваться утверждением задачи б и указанием к ней. **268.** Указания. а) Рассмотреть тетраэдр, симметричный относительно плоскости Oxy. б) Воспользоваться утверждением задачи а. в) Рассмотреть два случая и воспользоваться утверждениями задач а и б. **269.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат с осями DA, DB и DC. **272.** Указания. а) Исследовать взаимное расположение двух точек: точки, симметричной вершине основания, и точки, в которую переходит эта вершина при параллельном переносе, переводящем одно основание в другое. б) См. указание к задаче а. **273.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в точке пересечения медиан тетраэдра и коэффициентом 3. **274.** Указание. Через вершины какого-нибудь правильного тетраэдра провести параллельные друг другу плоскости так, чтобы расстояния между ними были пропорциональны расстояниям между данными плоскостями.

Задачи для подготовки к ЕГЭ

3

1. 10 см^2. **2.** 6 см^2. **3.** 10 см^2. **4.** 5,5 см^2. **5.** 12 см^2. **6.** 12 см^2. **7.** 14 см^2. **8.** 10 см^2. **9.** 10 см^2. **10.** 12. **11.** 2. **12.** 24. **13.** 24. **14.** 4. **15.** 2. **16.** 100. **17.** 0,25. **18.** 1. **19.** 15. **20.** 13. **21.** 6. **22.** 6. **23.** 45°. **24.** –5. **25.** 5. **26.** 10. **27.** –1. **28.** 8. **29.** 2. **30.** –6. **31.** 5. **32.** 3. **33.** 3. **34.** 10. **35.** 10. **36.** 0. **37.** 3. **38.** 0,5.

6

1. $\frac{24}{25}$. **2.** 12. **3.** 2,5. **4.** 5. **5.** 0,6. **6.** $\frac{7}{25}$. **7.** $-\frac{24}{25}$. **8.** 0,7. **9.** $\frac{24}{25}$. **10.** 5. **11.** 2. **12.** 41°. **13.** 48°. **14.** 130°. **15.** 45°. **16.** 55°. **17.** 3. **18.** 5. **19.** 18. **20.** 30°. **21.** 126°. **22.** 0,5. **23.** 3. **24.** 46°. **25.** 1,5.

8

1. 98. **2.** 45°. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 5. **6.** 46. **7.** 60°. **8.** 5. **9.** 2. **10.** В 27 раз. **11.** 8. **12.** 5. **13.** 4. **14.** 120. **15.** 8. **16.** 4,5. **17.** 18. **18.** 4,5. **19.** 4. **20.** 13. **21.** 16. **22.** 48. **23.** 6. **24.** 9 м^3. **25.** 128. **26.** 9. **27.** В 4 раза. **28.** 5 см^2. **29.** 8 см^2.

14

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.** 60°. **4.** 2. **5.** 1,5. **6.** 0,25. **7.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **8.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **9.** 30°. **10.** 2. **11.** $\frac{6}{5}$. **12.** $\frac{2}{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **15.** 5. **16.** 4. **17.** 2. **18.** $2\sqrt{7}$. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **22.** 2 или 14.

16

1. $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$. **2.** 1 : 2. **3.** 6. **4.** $2\sqrt{3}$. **5.** 45°. **6.** $8\sqrt{3}$ или 24. **7.** 75°, 60° и 45°; 120°, 15° и 45°; 105°, 45° и 30°; 135°, 30° и 15°. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{4}$. **11.** 3 и 5. **12.** 5. **13.** $\sqrt{21}$. **14.** 28 или $\sqrt{724}$. **15.** 90°. **16.** $2R$. **17.** 39 или 9. **18.** 2. **19.** 8 и 15. **20.** $\frac{\sqrt{2}a}{1+\sqrt{3}}$ и $\frac{2a}{1+\sqrt{3}}$. **21.** $2\sqrt{2}$. **22.** $a\sqrt{1+\frac{r}{R}}$ или $a\sqrt{1-\frac{r}{R}}$. **23.** $2+\frac{4\sqrt{2}}{3}$ или $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **24.** $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$. **25.** 105° или 165°. **26.** $\sqrt{35}+\sqrt{15}$ или $\sqrt{35}-\sqrt{15}$. **27.** $\frac{12}{5}$. **28.** 2,4; 16,9; 14,3. **29.** 150° и 210°. **30.** 1 или 7. **31.** $\frac{5\sqrt{13}}{12}$. **32.** 45°. **33.** 1,44 или 36. **34.** $\frac{ab}{c}$. **35.** 1 : 1. **36.** $18\sqrt{2}$. **37.** 48. **38.** 60. **39.** $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$. **40.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **41.** 37,2. **42.** $\frac{4}{3}\sqrt{2}R^2$. **43.** $\frac{1323}{20}$.

Предметный указатель

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ш

Список литературы

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 2. Стереометрия / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1952.
2. Александров П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 4. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Физматгиз, 1963.
3. Александров П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 5. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Наука, 1966.
4. Атанасян Л. С. Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — М.: Просвещение, 2013.
5. Бутузов В. Ф. Геометрия. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — М.: Просвещение, 2019.
6. Бутузов В. Ф. Геометрия. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — М.: Просвещение, 2019.
7. Бутузов В. Ф. Геометрия. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — М.: Просвещение, 2019.
8. Гельфанд И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. — М.: МЦНМО, 2009.
9. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т. Т. 2. Геометрия / Ф. Клейн. — М.: Наука, 1987.
10. Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Коксетер. — М.: Наука, 1966.
11. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2010.
12. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1989.
13. Шарыгин И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. — М.: Астрель: АСТ, 2001.

Интернет-ресурсы

1. http://gotourl.ru/11388
2. http://gotourl.ru/11389
3. http://gotourl.ru/11390
4. http://gotourl.ru/11391
5. http://gotourl.ru/11392

Интернет-ресурсы на английском языке

http://gotourl.ru/13600

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович
Прасолов Виктор Васильевич

**Математика: алгебра и начала
математического анализа, геометрия**

ГЕОМЕТРИЯ

10—11 классы

Базовый и углублённый уровни

Учебник

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*
Редакторы *П. А. Бессарабова, И. В. Рекман*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Фотографии *ООО Фотобанк «Лори»*
Компьютерная графика *А. Д. Вьюниковской, И. В. Губиной*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *Л. С. Александрова, И. П. Ткаченко*

Подписано в печать 09.11.2021. Формат 70×90/16. Гарнитура FreeSetC.
Усл. печ. л. 19,89. Уч.-изд. л. 17,21.
Тираж экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.